

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

15. Band, Heft 3 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 97—144

Algebra und Zahlentheorie.

● **Levi, Friedrich Wilhelm:** Algebra. Pt. I. Systems of linear equations. Calcutta: Univ. 1936. 28 pp.

Wigert, S.: Sur le théorème fondamental de l'algèbre. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 B, Nr 17, 1—5 (1936).

Der in dieser Arbeit angegebene Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ist dadurch bemerkenswert, daß er den Begriff der komplexen Zahl völlig vermeidet. — Zunächst teilt der Verf. ein Polynom $P(x)$ durch $(x - a)^2 + b^2$ (mit unbestimmten a, b) mit Rest: $P(x) = [(x - a)^2 + b^2] \cdot \bar{P}(x) + px + q$ und beweist (durch Induktion), daß $ap + q$ und bp konjugierte harmonische Funktionen von a, b sind. Die harmonische Funktion $\log[(ap + q)^2 + b^2 p^2]$ nimmt für große Werte von a, b beliebig große Werte an. Wäre sie überall regulär, so hätte sie ein Minimum, was für harmonische Funktionen unmöglich ist. Somit gibt es einen Punkt (a, b) , für welchen gleichzeitig $ap + q = 0, bp = 0$ gilt. — Ist dabei $p = 0$, so ist auch $q = 0$, so daß $P(x)$ durch $(x - a)^2 + b^2$ teilbar ist. — Ist aber dagegen $b = 0, p \neq 0$, so gilt $q = -ap_0$, $P(x) = (x - a)^2 \bar{P}(x) + p \cdot (x - a)$, so daß $P(x)$ durch $(x - a)$ teilbar ist.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Obrechhoff, Nikola: Sur un théorème de Laguerre. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 760—762 (1936).

Laguerre hat den folgenden Satz bewiesen [Œuvres 1, 111—113 (1898)]: Ist $P(z)$ ein Polynom mit lauter reellen Nullstellen, für welches $P(0) \neq 0$ ist, bedeutet ω eine beliebige positive Größe und ist

$$\frac{1}{[P(z)]^\omega} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

so hat das Polynom $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$ höchstens eine reelle Nullstelle. Verf. erweitert diesen Satz für allgemeinere Funktionen. Sz. Nagy (Szeged).

Dieudonné, Jean: Sur les zéros des dérivées des fractions rationnelles. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 767—769 (1936).

Auf Grund eines Satzes des Verf. (dies. Zbl. 9, 147) wird der folgende Satz bewiesen: Liegen die Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_m des Polynoms $Q(z)$ m -ten Grades in der Halbebene $\Im(z) > 0$ und bedeutet $\Phi(z)$ ein Polynom, für welches die Bedingungen

$$\frac{\Phi'(z_k)}{\Phi(z_k)} = C \frac{Q''(z_k)}{Q'(z_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, m; C = \text{Konst.})$$

erfüllt sind, so hat $\Phi(z)$ mindestens eine Nullstelle in der Halbebene $\Im(z) > 0$. Aus diesem Satze wird der folgende Satz gefolgert: Liegen die m Pole einer gebrochenen rationalen Funktion $F(z)$ vom m -ten Grade im Innern eines Kreises K , so hat jede Derivierte von $F(z)$ mindestens eine Nullstelle im Kreise K . Dieser Satz läßt sich im allgemeinen nicht verschärfen. Die Arbeit enthält auch einen allgemeineren Satz.

Sz. Nagy (Szeged).

Walsh, J. L.: Note on the behavior of a polynomial at infinity. Amer. Math. Monthly 43, 461—464 (1936).

Es werden die folgenden Sätze bewiesen: Ist $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$ und $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}$, so liegen die Nullstellen des Polynoms $P(z) - A$ für genügend großes $|A|$ in den beliebig nahen Umgebungen der Nullstellen des Polynoms $(z - \alpha)^n - A$. — Für genügend großes $|z|$ liegen die Nullstellen des Poly-

noms $Q(\zeta) = P(z) - (z - \zeta)^n$ in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes α . — Durch die Beweise des Verf. wird der Mangel an Strenge in den Beweisen einiger Sätze von F. Lucas [J. École polytechn. 28, 1—33 (1879); Bull. Soc. Math. France 17, 17—69 (1888)] behoben. Sz. Nagy (Szeged).

Boehm, Carl: Eine Anwendung des Determinantensatzes von Sylvester auf die Wronski-Determinante. Mh. Math. Phys. 44, 318—320 (1936).

The author gives a simple proof of the known theorem on vanishing of the Wronskian of a set of functions. I. S. Sokolnikoff (Madison).

Cherubino, S.: Sulle radici caratteristiche delle funzioni olomorfe di matrici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 846—849 (1936).

Let A be a commutative matrix algebra with unit element over the complex field with basis u_1, \dots, u_m . A power series $f(x)$ with coefficients in A can be written $\sum f_i(x) u_i$. There exists an ordering of the characteristic roots $\mu_j^{(i)}$ of u_i , and a consequent ordering of the roots α_j of x , such that $\sum_i f_i(\alpha_s) \mu_s^{(i)}$ are the roots of $f(x)$ under proper conditions of convergence. This generalizes the well-known theorem of Frobenius for $f(x)$ rational. MacDuffee (Madison).

Schwerdtfeger, Hans: Über mehrdeutige Matrixfunktionen. Compositio Math. 3, 380—390 (1936).

Let $f(z)$ be a multiple-valued function analytic in a region containing the characteristic roots of an $n \times n$ matrix A with complex elements. The values of $f(A)$ are defined in the sense of Cipolla (this Zbl. 4, 338). The matrices T such that $T^{-1}AT = A$ form a group G . The values of $f(A)$ which are commutative with every matrix of G are called isolated, and are those values which can be written as polynomials in A . The matrices of G which are commutative with a value $f_1(A)$ form a subgroup G_{f_1} of G called the normalizer of $f_1(A)$ in G . A value $\bar{f}_1(A) = T^{-1}f_1(A)T$ is called a conjugate of $f_1(A)$ if $T \in G$. Normalizers of conjugate values are conjugate subgroups. Two values $f_1(A)$ and $f_2(A)$ are called "not essentially different" if their normalizers are equal or conjugate, so that the number of classes of essentially different values is at most as great as the number of non-conjugate subgroups of G . The author proves that for every proper subgroup G_f of G there is a matrix A_f such that G_f is the normalizer of A_f not only in G but also in the group L of all non-singular matrices. If $f_1(A)$ and $f_h(A)$ are two non-conjugate not essentially different values of $f(A)$ with the normalizer G_{f_1} in G , then $f_h(A)$ can be expressed as a value of an algebraic function $\chi_h(z)$ at $z = f_1(A)$. If G_{f_1} is also the normalizer of $f_1(A)$ in L , then $\chi_h(z)$ is a polynomial. MacDuffee (Madison).

Moriya, Mikao: Über einen Satz von Herbrand. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 4, 181—194 (1936).

Herbrand [Théorie arithmétique des corps de degré infini. Math. Ann. 106, 489, Lemme 2 (1932); dies. Zbl. 4, 244] hat einen Hilfssatz darüber ausgesprochen, wie sich Grad und Ordnung der Primideale bei der Komposition zweier beliebiger endlich-algebraischer Erweiterungen eines endlich-algebraischen Zahlkörpers verhalten. Verf. stellt fest, daß in Herbrands Beweis dieses Hilfssatzes ein Fehler steckt, und daß der Hilfssatz nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen gilt. Er zeigt dann, daß dies hinreicht, um die von Herbrand l. c. gezogenen Folgerungen zu ziehen. Hasse (Göttingen).

Lehmer, D. H.: A generalized inverse algorithm. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 693—695 (1936).

Erweiterung eines Algorithmus des Verf. (dies. Zbl. 5, 343). Ist $S: e_1, e_2, \dots$ eine geordnete Klasse von Elementen und $C: e_{a_1}, e_{a_2}, \dots$ eine unendliche Teilklasse von S , $\theta(x)$ für x ganz und positiv die Anzahl der Elemente von C , die unter den ersten x Elementen von S vorkommen, $\theta(x) = 0$ für $x \leq 0$, m_0 und n positive ganze Zahlen, so wird die Reihe m_1, m_2, \dots gebildet, worin

$$m_r = n - \theta(s_r), \quad s_r = m_0 + m_1 + \dots + m_{r-1}.$$

Bewiesen wird: Die m_i sind nicht verschieden im Vorzeichen und die $|m_i|$ nehmen nicht zu. Es gibt eine ganze Zahl k , so daß $m_v \neq 0$ für $v < k$; $m_v = 0$ für $v \geq k$. Wenn $m_1 > 0$, so ist e_{s_k} das n -te Glied, ist $m_1 > 0$, so ist $e_{s_{k-1}}$ das $(n - m_{k-1})$ -te Glied, und ist $m_1 = 0$, so ist e_h ($n \leq h \leq m_0$) das n -te Glied von C . N. G. W. H. Beeger.

Basoco, M. A.: Note on the greatest integer function. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 720—726 (1936).

Mitteilung einer großen Anzahl trivialer Identitäten zwischen je zwei endlichen Summen, die sich sehr leicht durch Umordnung der Summationsreihenfolge beweisen lassen, wie es in der elementaren Zahlentheorie üblich ist. Verf. gewann sie aus Entwicklungen der elliptischen Funktionen, teilt aber die Einzelheiten seiner Beweise nicht mit. Bessel-Hagen (Bonn).

Sugar, Alvin: A cubic analogue of the Cauchy-Fermat theorem. Amer. J. Math. **58**, 783—790 (1936).

Let $g(P)$ denote the least number of values of the polynomial $P(x) = \frac{1}{6}m(x^3 - x) + x$ (x integral and ≥ 0) necessary to represent every positive integer. The author proves that, if m is an integer ≥ 16 , then $g(P) = m + 3$. Wright (Aberdeen).

Schur, I.: Über den Begriff der Dichte in der additiven Zahlentheorie. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1936**, 269—297.

A sei eine Folge natürlicher Zahlen; $A(x)$ bedeute die Anzahl der Zahlen von A , die $\leq x$ sind; die untere Schranke der Verhältnisse $A(x)/x$ für $x = 1, 2, \dots$ heiße die Dichte von A . Als Summe C der Folgen A_1, A_2, \dots, A_n wird die Folge der Zahlen $c > 0$ bezeichnet, die sich in der Form

$$c = \sum_{i=1}^n e_i a_i$$

darstellen lassen, wo a_i ($1 \leq i \leq n$) eine Zahl von A_i und e_i ($1 \leq i \leq n$) 0 oder 1 ist; α_i bzw. γ sei die Dichte von A_i bzw. C , und es sei $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$. Die bekannte Vermutung

$$\gamma \geq \text{Min} \left\{ 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\}$$

ist bis jetzt nicht bewiesen; vorliegende Abhandlung befaßt sich mit einigen durch diese Vermutung nahegelegten Fragen. Die Hauptergebnisse sind: 1. bedeutet c_n die größte Zahl, für die stets

$$\gamma \geq c_n \text{ Min} \left\{ 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\}$$

gilt, so ist allgemein $c_n > 0,6148$ und speziell $c_2 > 0,8284$ und $c_3 > 0,7581$; 2. bedeutet $c_n^{(m)}$ ($n > m \geq 2$) die größte Zahl, für die stets

$$\gamma \geq c_n^{(m)} \text{ Min} \left\{ 1, \sum_{i=1}^m \alpha_i \right\}$$

gilt, so ist allgemein

$$c_n^{(m)} > \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-m}}$$

und speziell bei $n \geq m^2$

$$c_n^{(m)} > \frac{n}{m} - \frac{1}{4};$$

3. bedeutet m_n die größte ganze Zahl, für die stets $\gamma \geq \text{Min} \left\{ 1, \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i \right\}$ gilt, so ist

$$m_n \geq \left[\frac{3n}{4} \right]$$

(die Ungleichung $m_n \geq \frac{3n}{4}$ auf S. 273 oben beruht offensichtlich auf einem Versehen; aus ihr würde die obenerwähnte Vermutung unmittelbar folgen); 4. bedeutet $k_n \geq 1$ den kleinsten Exponenten, für den stets $\gamma^{k_n} \geq \text{Min} \left\{ 1, \sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_n} \right\}$ gilt, so ist $k_n \leq 1,3886 \dots$ —

Die Beweise sind elementar und beruhen außer bekannten Abschätzungen von γ noch auf zwei neuen Sätzen, die sich auf den Fall $n = 2$ beziehen und auch selbständiges Interesse bieten: 1°. stets ist $\gamma \geq \min \left\{ 1, \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1} \right\}$, $\gamma \geq \min \left\{ 1, \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \right\}$; 2°. stets ist $2\gamma \geq \min \left\{ 2, \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2^2} + \alpha_1 \right\} \geq \min \left\{ 2, \sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_1^2} + \alpha_2 \right\}$. *A. Khintchine.*

Davenport, H., and P. Erdős: On sequences of positive integers. *Acta Arithmet.* **2**, 147—151 (1936).

Let a_1, a_2, \dots be any sequence of different positive integers, and b_1, b_2, \dots the integers divisible by at least one a . It was proved by Besicovitch (this Zbl. **9**, 395) that the sequence $\{b_i\}$ may have different upper and lower densities. Here it is shown that the logarithmic density $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \sum_{b_i \leq x} b_i^{-1}$

exists, and is equal to the lower density of the sequence. The proof uses Dirichlet series. It is deduced that if a sequence a_1, a_2, \dots has a positive upper logarithmic density, then it has a subsequence a_{i_1}, a_{i_2}, \dots in which $a_{ik} | a_{i_{k+1}}$ ($k = 1, 2, \dots$).

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Hille, Einar: A problem in „Factorisatio Numerorum“. *Acta Arithmet.* **2**, 134 bis 144 (1936).

The subject of this paper is the function $f(n)$ which gives the number of representations of n as a product of factors greater than 1. We have]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \{2 - \zeta(s)\}^{-1}.$$

Various estimates of $f(n)$ and of sums involving it are given. See Kalmár, this Zbl. **1**, 127.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Wright, E. Maitland: The representation of a number as a sum of four „almost proportional“ squares. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **7**, 230—240 (1936).

Reference is made to this Zbl. **9**, 153. Every n with a sufficiently large odd factor is shown to be a sum of four squares almost proportional, in the sense of (1), to any assigned $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. The largeness of the odd factor is necessary for the truth of the theorem. The Hardy-Littlewood method is used with the refinements of Kloostermann [Acta math. **49**, 407—464 (1926)].

G. Pall (Montreal).

Kober, H.: Ein Mittelwert Epsteinischer Zetafunktionen. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **42**, 128—141 (1936).

Let $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ be a real positive-definite quadratic form, and

$$Z_Q(s) = \sum_{m, n}^v \{Q(m, n)\}^{-s}.$$

It is proved that, if a, b , and c are integers, and $d = b^2 - 4ac$ a fundamental-discriminant, then as $T \rightarrow \infty$

$$\int_0^T |Z_Q(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt = O(T \log^2 T).$$

If the class-number h is 1, or $d = -15, -20$, or -24 , so that $h = 2$, then

$$\int_0^T |Z_Q(\tfrac{1}{2} + it)|^2 dt \sim a_d T \log^2 T.$$

The proof is similar to that of Titchmarsh, *Proc. London Math. Soc.* (2) **27**, 137—150 (1928), for $|\zeta(\tfrac{1}{2} + it)|^4$.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Gelfond, A. O.: Transzendente Zahlen. (*Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.*) *Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad* **1**, 141—164 (1935) [Russisch].

Im vorliegenden Vortrag, der im Sommer 1934 gehalten wurde und daher heute schon wieder zum Teil überholt ist, gibt Verf. einen sehr schönen Überblick über die Entwicklung der Theorie der transzendenten Zahlen und Transzendenzbeweise; er

bemüht sich dabei, bei den wichtigeren Resultaten jeweils auch eine nähere Einsicht in die Gründe für die Möglichkeit der Beweise zu geben. — Inhaltsübersicht: Liouvillesches Kriterium und Liouvillescher Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen. — Hermitesche Identität und ihre Anwendung durch Hermite und Lindemann zum Beweis der Transzendenz von e bzw. π . — Cantorscher Beweis der Nichtabzählbarkeit der transzenten Zahlen. — Transzendenzmasse von Borel und Popken für e und π . — Allgemeines Kriterium für transzendente Zahlen. — Untersuchungen von Morduchaj-Boltowskoj über die Klassifizierung transzendenter Zahlen, über die Irrationalitätsmasse der Nullstellen meromorpher Funktionen und über die Zahlen, die sich aus algebraischen Zahlen durch wiederholte Anwendung der elementaren transzenten Funktionen ableiten lassen. — Eingehende Darstellung der Siegelschen Methode zum Beweis der Transzendenz der Besselschen und verwandten Funktionen. — Erste Gelfondsche Transzendenzbeweis-Methode mittels der Newtonschen Interpolationsreihe; ihre Verwendung zum Beweis der Transzendenz von e^π und weitere Anwendungen durch Kusmin, Siegel, Boehle, Koksma-Popken; ein allgemeiner Satz von Gelfond über die verallgemeinerten Perioden ganzer Funktionen. — Gelfond-scher Beweis der Transzendenz von α^β im allgemeinen Fall. — Transzendenzmasse für die Exponentialfunktion von Mahler; Mahlerscher Beweis der Transzendenz der p -adischen Exponentialfunktion. — Wegen der Literatur, auch in neuerer Zeit, siehe J. F. Koksma, *Ergebnisse der Mathematik* IV, 4 (Berlin: Julius Springer 1936), besonders Kapitel 4. Mahler (Krefeld).

Gruppentheorie.

Kurosch, Alexander: Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe. *Rec. math. Moscou*, N. s. 1, 345—349 (1936).

Beweis der Verfeinerungs- und Eindeutigkeitssätze für Zerlegungen beliebiger (Operator-) Gruppen in (endlich oder unendlich viele) charakteristische direkte Faktoren durch Vereinigung der von Fitting [*Math. Z.* 41, 380—395 (1936); dies. Zbl. 14, 104] und Baer [*Quart. J. Math.* 6, 222—232 (1935); dies. Zbl. 12, 152] angegebenen Methoden. Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Turkin, W. K.: Über Quasinormalisatoren der Elemente in endlichen Gruppen. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 3, 359—360 (1936).

Mitteilung der folgenden Resultate: \mathfrak{G} sei eine Gruppe der Ordnung $p^\alpha n$ (p eine Primzahl, die nicht in n aufgeht), A ein Element der Ordnung p^k aus \mathfrak{G} mit $k \leq \alpha$, $\mathfrak{N}_A^{(i)}$ die Gruppe der Elemente X , für die

$$XAX^{-1} = A^m, \quad m \equiv 1 \pmod{p^i}, \quad (i \leq k) \quad (1)$$

gilt. Falls nicht $p = 2$ und $\lambda = 1$ ist, gilt dann: Wenn $\mathfrak{N}_A^{(\lambda)} = \mathfrak{N}_A^{(\lambda+1)}$ ist, so ist $\mathfrak{N}_A^{(\lambda+2)}$ eine Untergruppe von Index p in $\mathfrak{N}_A^{(\lambda+1)}$. Für $p = 2$, $\lambda = 1$ gilt statt dessen: Ist $\mathfrak{N}_A^{(1)} \neq \mathfrak{N}_A^{(2)} = \mathfrak{N}_A^{(3)}$, so ist $\mathfrak{N}_A^{(3)} \neq \mathfrak{N}_A^{(4)}$. Gibt es in \mathfrak{G} insbesondere ein Element X , so daß in (1) $m \equiv 1 + p^i \pmod{p^{i+1}}$ wird, so gilt $k \leq \frac{\alpha + i}{2}$, falls nicht $i = 1$ und $p = 2$ ist; in diesem Falle gilt $k \leq \frac{2 + \alpha}{2}$. Ist n zu $p(p-1)$ teilerfremd und ist der Quotient der Ordnungen der Normalisatoren von $A^{p^{k-1}}$ und A nicht durch p teilbar, so ist A mit keiner seiner Potenzen konjugiert. Ist n zu $p(p-1)$ teilerfremd und die Ordnung des Normalisators von A^p nicht durch p^{2k} teilbar, so hat \mathfrak{G} einen Normalteiler mit durch n teilbarer Ordnung, falls $p > 2$ ist. Magnus (Frankfurt a. M.).

Todd, J. A., and H. S. M. Coxeter: A practical method for enumerating cosets of a finite abstract group. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 5, 26—34 (1936).

Die Definition einer endlichen Gruppe G mit Hilfe von erzeugenden Elementen und definierenden Relationen erfordert im allgemeinen mühsame Aufzählungen und auf den speziellen Fall zugeschnittene geschickte Rechnungen. Es wird gezeigt, daß

ein geeignet angelegtes Schema zur Aufsuchung der Nebengruppen einer leicht übersehbaren (nach Möglichkeit zyklischen) Untergruppe von G die Rechenarbeit wesentlich abkürzt; an Beispielen wird gezeigt, daß insbesondere der Nachweis der Vollständigkeit eines Relationensystems auf dem angegebenen Wege sich sehr einfach gestaltet.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Hedlund, Gustav A.: Fuchsian groups and transitive horocycles. Duke math. J. 2, 530—542 (1936).

Im Innern des Einheitskreises E der komplexen z -Ebene werde die Poincarésche hyperbolische Metrik eingeführt. Die innerhalb E gelegenen Orthogonalkreisbögen sind dann bekanntlich die geodätischen Linien. Man betrachte ferner eine Fuchssche Gruppe F linear-gebrochener Substitutionen mit E als Hauptkreis. Identifiziert man alle unter F kongruenten Punkte innerhalb E , so entsteht eine Fläche S der Krümmung minus Eins. Verfolgt man eine der obigen geodätischen Linien auf S , so findet man, falls F von der ersten Art ist, daß die auf ihr liegenden Linienelemente jedem beliebigen Linienelement auf S beliebig nahe kommen, wenigstens „im allgemeinen“. Diese, Transitivität genannte, Eigenschaft der Linien ist wohlbekannt. — Verf. stellt sich nun die Frage nach der Transitivität anderer als der obigen Linien, nämlich überhaupt bei den Linien konstanter geodätischer Krümmung g_c . Es ist bekannt, daß auch diese Kurven Kreise sind. Dabei stellt sich heraus, daß die Fälle $g_c \neq 1$ entweder gegenstandslos oder mit dem obigen Fall $g_c = 0$ leicht in Verbindung zu bringen sind. Nur der Fall $g_c = 1$ bedarf einer neuen Untersuchung. Hierbei handelt es sich um die E von innen berührenden Kreise, die der Verf. Horozykeln nennt. — Zunächst wird bewiesen, daß von den Horozykeln mit gleichem Berührungspunkt auf E entweder alle oder keiner transitiv sind. Damit wird die Transitivität der Horozykeln eine Eigenschaft der Punkte des Einheitskreises E — die h -Transitivität eines Punktes von E . Die eingehende Untersuchung führt Verf. zu folgenden Hauptsätzen: 1. Wenn der (in bekannter Weise konstruierte) Fundamentalbereich B von F ganz innerhalb E liegt, so sind sämtliche Punkte von E h -transitiv. 2. Wenn F von der ersten Art ist, und wenn B nur parabolische Punkte auf E besitzt, so sind alle Punkte von E h -transitiv bis auf diejenigen, welche Fixpunkte parabolischer Substitutionen von F darstellen. — Verf. kann davon eine Anwendung auf die „Strömung“ machen, die im Phasenraum Ω (Raum der Linienelemente) der Fläche S durch gleichförmige Bewegung längs der geodätischen Linien von S entsteht. Sind nämlich A, B zwei willkürliche offene Mengen in Ω , so hat für alle genügend großen Zeiten t die von der Strömung mitgeführte Menge A_t Punkte mit der festen Menge B gemein (A_t verteilt sich immer dichter in Ω). Ref. bemerkt hierzu, daß daraus die Transitivität der „Quadratströmung“ folgt. Könnte man deren „metrische“ Transitivität beweisen, so wäre (nach einem Mischungssatz des Ref.) sogar bewiesen, daß die obige Strömung vom „Mischungstypus“ ist.

E. Hopf (Leipzig).

Dantzig, D. van: Zur topologischen Algebra. III. Brouwersche und Cantorsche Gruppen. Compositio Math. 3, 408—426 (1936).

In Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. [vgl. Math. Ann. 107, 587—626 (1932), dies. Zbl. 6, 7, u. Compositio Math. 2, 201—223 (1935), dies. Zbl. 12, 6] wird gezeigt: Eine im kleinen kompakte topologische Gruppe, die von jeder Umgebung der 1 erzeugt wird, ist zusammenhängend. — Eine topologische Gruppe ist dann und nur dann Cantorsch, wenn sie vollständig ist und die Topologie in ihr durch eine absteigende Folge von Normalteilern B_i erklärt werden kann, so daß B_i/B_{i+1} endlich ist (Analogon des Satzes über Cantorsche Ringe in der zweiten der obengenannten Arbeiten des Verf.). Für diese Cantorschen Gruppen werden dann auch durch Grenzübergang vom Endlichen der Jordan-Hoeldersche Satz und die Sätze über Sylow-Gruppen hergeleitet. Schließlich wird für eine Reihe von Abbildungsgruppen gezeigt, daß sie Cantorsch sind.

Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Sur quelques propriétés des ensembles dénombrables. Spisanije bulg. Akad. naukinye H. 53, 181—195 (1936).

For an arbitrary family Φ of substets of a countable set D denote by Φ_e the family formed of all sets which belong to Φ or are differences of sets of Φ , by Φ_σ the family of all sets which are sums of a countable infinity of sets of Φ (distinct or not). Consider the sequences

$$(1) \quad \Phi, \Phi_e, \Phi_{e\sigma}, \Phi_{e\sigma e}, \dots \qquad (2) \quad \Phi, \Phi_\sigma, \Phi_{\sigma e}, \Phi_{\sigma e\sigma}, \dots$$

All the terms of the first sequence after the fourth and all the terms of the second after the fifth are equal. There is a family Φ for which $\Phi_{\sigma e\sigma e} \neq \sigma e\sigma e\sigma$. Let Φ_δ be the class of all products of a countable infinity of subsets of Φ . Consider the sequences:

$$(3) \quad \Phi, \Phi_\sigma, \Phi_{\sigma\delta}, \Phi_{\sigma\delta\sigma}, \dots \qquad (4) \quad \Phi, \Phi_\delta, \Phi_{\delta\sigma}, \Phi_{\delta\sigma\delta}, \dots$$

Then all the terms of the sequences (3), (4) after the second are equal. Consider the sequences:

$$(5) \quad \Phi, \Phi_e, \Phi_{e\delta}, \Phi_{e\delta e}, \dots \qquad (6) \quad \Phi, \Phi_\delta, \Phi_{\delta\sigma}, \Phi_{\delta\sigma e}, \dots$$

All the terms of (5) after the fourth and all of (6) after the fifth are equal. Given the series

$$(7) \quad \Phi, \Phi_\sigma, \Phi_{\sigma e}, \Phi_{\sigma e\sigma}, \dots$$

where Φ_e is the family of all sets of the form $D - E$, where E belongs to Φ , $\Phi_{(\sigma e)2n-1\sigma} = \Phi_{(\sigma e)^{n+1}} = \Phi_{\sigma\delta e}$, and $\Phi_{(\sigma e)2n} = \Phi_{(\sigma e)2n\sigma} = \Phi_{\sigma\delta}$ for $m = 1, 2, 3, \dots$

There exists an uncountable set D and family Φ for which $\Phi_{\sigma\delta} \neq \Phi_{\delta\sigma}$.

Chittenden (Iowa).

Sierpiński, W.: Sur un problème de M. Kolmogoroff. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 303—305 (1936).

In relation to a more general problem of Kolmogoroff, the author shows that there exists a family Φ of linear sets such that $\alpha(\Phi) = 3$, the meaning of $\alpha(\Phi)$ being as follows: Φ_σ, Φ_δ represent respectively the families of all sets which are sums, products of a denumerable infinity of sets of Φ ;

$$\Phi^0 = \Phi, \quad \Phi^1 = \Phi_\sigma, \quad \Phi^2 = \Phi_{\sigma\delta}, \quad \Phi^3 = \Phi_{\sigma\delta\sigma}, \quad \Phi^4 = \Phi_{\sigma\delta\sigma\delta}, \dots$$

Then if indices n exist such that $\Phi^n = \Phi^{n+k}$ for $k = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha(\Phi)$ is the smallest such. The existence of a Φ as described is proved on the assumption that $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, and use is made of a non-denumerable set L , defined by Lusin, which contains no non-denumerable non-dense subset.

Blumberg (Columbus).

Sierpiński, W.: Un théorème de la théorie générale des ensembles et ses applications. C. R. Soc. Sci. Varsovie 28, 131—135 (1936).

The following theorem is proved: If E is an arbitrary set of cardinal \aleph_1 , Φ a family of \aleph_1 subsets of E , and G a group of \aleph_1 biunique transformations of E into itself such that, for every sequence f_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) of transformations of G and

every sequence H_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) of sets of Φ , the set $E - \sum_1^\infty f_i(H_i)$ is non-de-

numerable, there exists a non-denumerable subset N of E having no more than \aleph_0 elements in common with every element of Φ and such that $f(N) - N$ is at most denumerable for every transformation f of F . This result is applied to the linear continuum, a number of corollaries being stated on the assumption that $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, for example: If $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, there exists a non-denumerable linear set N having property C (also one having property S — for the meaning of these letters see the author's book, Hypothèse du continu, p. 39 and 81, Warsaw 1934) such that every isometric transformation of the straight line into itself transforms N into itself, if we may neglect a finite or a denumerable set of points.

Blumberg (Columbus).

Sierpiński, W.: Sur les fonctions de classe 1. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 47—48 (1936).

Utilizing a function constructed by Lusin, the author shows, on the basis of the continuum hypothesis $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, that there exists a function of Baire's first class, defined on a linear, non-denumerable set E , which is discontinuous on every non-denumerable subset of E .

Blumberg (Columbus).

Sanders jr., S. T.: Derived sets and their complements. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 577—584 (1936).

The author investigates operators of the type $\Phi A = g^\alpha c g^\beta \dots c g^\omega A$ (where α, β, \dots may be zero, or finite or transfinite ordinals), formed by iterating the operators cA and gA of taking complements and derived sets, in a space where derived sets are closed, and the operator g is distributive. His results are more complicated than those of Kuratowski, who studied a similar problem for the closure operator \bar{A} (Fundam. Math., v. 3). It is shown that Φ reduces to one of the operators $1, c, cg, cgc, cgcg, cgcgc$, or one of these preceded by g^α or cg^α . It is also shown that the result of any finite sum of finite products of operators Φ acting on A , is expressible in terms of eight elementary sets depending only on A , and a subset of the derived set of the isolated points of the space. The results simplify considerably in an open self dense space. — The operators considered include many interesting ones little studied in topology, such as $cgcA$, which is analogous to the interior of A . The result $gcgA = gcgcgcgA$ extends to many important operators besides g . It should be pointed out that the assumptions made, while quite natural, are not quite equivalent to those of Kuratowski, as has been shown by Appert. For example, the author states that his space is a neighborhood space with open sets for neighborhoods, as is actually the case with Kuratowski. Here, however, in the special case where $gA \equiv A$, derived set cannot be defined in terms of neighborhoods in the usual way.

Orrin Frink jr. (State College, Pa.).

Jarník, Vojtěch: Sur les fonctions de deux variables réelles. Fundam. Math. 27, 147—150 (1936).

Let Π be the Euclidean plane, s a line of this plane, $f(P) = f(x, y)$ a real function on Π . Let P be an arbitrary point of s and d be an arbitrary direction from P . Denote by \vec{Pd} the half line from P in the direction d , excluding P . Denote by $E(P, d)$ the set of all numbers ξ such that: there is a sequence of points P_1, P_2, \dots such that $P_n \in \vec{Pd}$, $P_n \rightarrow P$, $f(P_n) \rightarrow \xi$ as $n \rightarrow \infty$. Then there is a countable set D in s such that if d_1, d_2 are any two directions on the same side of s , then (1) $E(P, d_1) \cdot E(P, d_2) \neq 0$, for each point P of $s - D$. — The relation (1) cannot be replaced by

$$E(P, d_1) \cdot E(P, d_2) \cdot E(P, d_3) \neq 0$$

even though the three directions d_1, d_2, d_3 , are fixed in advance. If $F(x)$ is a real finite function of a real variable, and $f(x, y) = \frac{F(y) - F(x)}{y - x}$ ($y \neq x$), $F(x, x) = 0$, there is a countable set D for which one can for each $x \in R - D$ select two sequences $h_1, h_2, \dots; k_1, k_2, \dots$ such that $h_n > 0$, $h_n \rightarrow 0$, $k_n < 0$, $k_n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + h_n) - F(x)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x + k_n) - F(x)}{k_n}.$$

(cf. Schmeiser, Fundam. Math. 22, 70—76, this Zbl. 8, 343; Blumberg, Fundam. Math. 16, 17—24.)

Chittenden (Iowa).

Chuang, Chi-Tai: On the uniform convergence of certain sequences of functions. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 353—366 (1936).

The following theorems are proved: 1. If $\{f_n(x)\}$ is a sequence of non-decreasing (non-increasing) functions, defined in the closed interval (a, b) , which converges at a and b and at the points of a set E , everywhere dense in (a, b) , it converges uniformly

in (a, b) to a non-decreasing (non-increasing) function. 2. If $\{f_n(x)\}$ is a sequence of functions, defined in (a, b) , convex (concave) for $a < x < b$ and continuous at a and b , and $\{f_n(x)\}$ converges at a and b and at every point of a set E everywhere dense in (a, b) to a function continuous at a and b with respect to E , then $\{f_n(x)\}$ converges uniformly in (a, b) to a function which is convex (concave) in $a < x < b$ and continuous at a and b . 3. If \mathcal{A} is a family of functions each of which is either convex or concave in $a < x < b$ and continuous at a and b , and \mathcal{A} is bounded at a and b and some point in $a < x < b$, then $f(x)$ is normal in the interior of (a, b) . — There are several other theorems involving successive derivatives of $f_n(x)$. *Blumberg (Columbus).*

Faddeeff, D.: Sur la représentation des fonctions sommables au moyen d'intégrales singulières. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 351—367 u. franz. Zusammenfassung 368 (1936) [Russisch].

A point x is called a Lebesgue point of an integrable function $f(x)$ if $h^{-1} \int_{x-h}^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. The author considers a sequence of singular integrals $\int_a^b \varphi_n(x, t) f(t) dt$ and proves that the following set of conditions are necessary and sufficient in order that $\int_a^b \varphi_n(x, t) f(t) dt \rightarrow f(x)$ as $n \rightarrow \infty$, at all Lebesgue points of $f(x)$, where $f(x)$ is an arbitrary integrable function. (I) $\int_a^\beta \varphi_n(x, t) dt \rightarrow 1$ as $n \rightarrow \infty$, $\alpha < x < \beta, a \leq \alpha < \beta \leq b$. (II) There exists, for each n , a function $\psi_n(x, t)$ such that (a) $|\varphi_n(x, t)| \leq \psi_n(x, t)$ for almost all t, x fixed. (b) $\psi_n(x, t') \leq \psi_n(x, t'')$, $t' < t'' < x; \psi_n(x, t') \geq \psi_n(x, t''), x < t' < t''$. (c) $\int_a^b \psi_n(x, t) dt \leq M(x)$ for $n \geq N(x)$.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Natanson, I.: Sur la représentation des fonctions sommables par des intégrales singulières. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 369—375 (1936).

The author gives a different proof of the sufficiency of conditions of theorems of Romanovsky (this Zbl. 2, 190—191) and Faddeeff (see the prec. review).

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Saks, S.: On derivatives of functions of rectangles. Fundam. Math. 27, 72—76 (1936).

This note contains a theorem, which may be considered as a generalization of some results given by A. J. Ward, Fundam. Math. 26 (1936), this Zbl. 13, 251. If $F(J)$ is an additive function of rectangles (with sides parallel to the co-ordinate axes), then the lower strong derivate $\underline{F}^*(x, y)$ of $F(J)$ at the point (x, y) is defined as the lower limit of $\frac{F(J)}{|J|}$ where J is an arbitrary rectangle containing (x, y) of diameter $d(J)$ tending to zero; the ordinary derivative $F'(x, y)$ will be the limit (if it exists) of $\frac{F(S)}{|S|}$ where S is a square containing (x, y) and of diameter tending to zero. Now $F(J)$ will have a derivative $F'(x, y)$, equal to $\underline{F}^*(x, y)$, almost everywhere on the set of points at which $\underline{F}^*(x, y) > -\infty$. *J. Ridder (Groningen).*

Kempisty, Stefan: Sur les fonctions absolument continues d'intervalle. Fundam. Math. 27, 10—37 (1936).

The author defines and discusses various classes of functions of intervals, corresponding to generalized absolutely continuous functions (ACG^*), or to functions of generalized bounded variation (VBG^*), of a real variable. Their respective definitions differ from those of Krzyżański [O uogólnionych funkcjach bezwzględnie ciągłych, Univ. Vilnensis Batoreana Dissertationes inaugurales N° 7 (1934)] essentially in that the author of the present memoir considers only systems of intervals of parameters of regularity $> 1/2$, while in Krzyżański's paper systems of arbitrary intervals are

considered. Burkill's definition of the integral of functions of intervals is subject to the same modification. This allows the author to establish a series of theorems concerning the relations between the derivatives of functions of intervals and those of their integrals. These theorems are further applied to the theory of the Denjoy integral of functions of two, or more, variables. *Saks (Warszawa).*

Fichtenholz, Gr.: Sur une généralisation de l'intégrale de Stieltjes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 95—100 (1936).

The author denotes by V the class of functions of bounded variation in a fixed interval $[a, b]$, and by D the class of those functions which have no points of discontinuity except those of the first kind. The paper contains a suitable modification of the Riemann-Stieltjes integral, which allows the integration of all functions of the class D with respect to any function of the class V . In view of further applications the author establishes the fundamental properties of that integral, and states the conditions for a sequence $\{y_n\}$ of functions of the class D in order that $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b y_n dx = 0$, whenever $x \in V$, and for a sequence $\{x_n\}$ of functions of the class V in order that $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n dy = 0$ whenever $y \in D$. Further, in terms of the Riemann-Stieltjes integral, as defined by the author, there are established the general forms of linear functionals in the space D (the norm of an element y in D may be understood in two manners: either as the ordinary upper bound of $|y(t)|$ on $[a, b]$, or as the upper bound of $|y(t)|$ when the values of $y(t)$ on enumerable sets are neglected). These general forms of linear functionals allow the author to give necessary and sufficient conditions for the weak convergence of sequences of elements in D . *Saks (Warszawa).*

Besicovitch, A. S.: On the Kolmogoroff maximum and minimum measures. Math. Ann. **113**, 416—423 (1936).

Kolmogoroff (Math. Ann. **107**, 351—356; this Zbl. **6**, 50) has given a set of axioms for measure functions $\mu(E)$ on the class B of all B -measurable sets in the Euclidean n -dimensional space R_n which are not characteristic but determine maximum and minimum functions for k -dimensional spaces which may be denoted by $\bar{\mu}^k(E)$ and $\mu^k E$. The author shows that the minimum measure does not coincide with the Carathéodory k -dimensional measure in R_n . A set is regular if its Carathéodory metric density is 1. Then sets for which $\mu^k(E)$ is uniquely defined in R_n are regular and any regular set, reduced by at most a set of measure zero has a uniquely defined measure.

Chittenden (Iowa).

Kondô, Motokiti: Sur les notions de la catégorie et de la mesure dans la théorie des ensembles de points. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. **4**, 123—180 (1936).

Le but de ce mémoire est de développer les parties essentielles de la théorie de la mesure et des catégories de Baire dans un espace abstrait R sur lequel on ne fait aucunes hypothèses d'ordre métrique ou topologique. L'auteur distingue dans R les ensembles minces et les ensembles mesurables (B), les premiers d'eux correspondant aux ensembles de mesure nulle et aux ensembles de première catégorie de Baire. A l'aide de ces notions, qui sont les termes primitifs de la théorie, l'auteur définit l'étendue, extérieure et intérieure, d'un ensemble et la propriété de Lebesgue d'un ensemble ou d'une fonctionnelle dans R ; elles correspondent respectivement à la mesure, extérieure et intérieure, d'un ensemble et à la mesurabilité d'un ensemble ou d'une fonction. A titre d'exemple nous citons les définitions. Deux ensembles A et B dans R sont dits équivalents relativement à une famille d'ensembles \mathfrak{F} , lorsque, \mathfrak{M} désignant la classe des ensembles minces, les relations $FA \in \mathfrak{M}$ et $FB \in \mathfrak{M}$ sont équivalentes quel que soit l'ensemble F appartenant à la famille \mathfrak{F} . Un ensemble H est dit étendue extérieure d'un ensemble E lorsqu'il est mesurable (B) et lorsqu'il

est équivalent à E relativement à la famille des ensembles complémentaires des ensembles mesurables (B). Pareillement, un ensemble K mesurable (B) est étendue intérieure de E , lorsque les complémentaires de K et de E sont équivalents relativement à la famille des ensembles mesurables (B). Lorsque pour un ensemble E les deux étendues, extérieure et intérieure, existent et sont équivalentes (relativement à la famille de tous les ensembles dans R), on dit que l'ensemble E jouit de la propriété de Lebesgue. L'auteur montre que, en se servant de ces définitions descriptives, on peut généraliser, complètement ou partiellement, une série des théorèmes de la théorie des fonctions réelles, sans altérer d'ailleurs les idées essentielles des démonstrations connues. Tel est p. ex. le théorème sur l'invariance de la mesurabilité (de la propriété de Lebesgue) d'ensembles par rapport à l'opération (A) de Souslin. En assujettant ensuite les ensembles minces dans l'espace R aux certaines conditions additionnelles, l'auteur discute pour cet espace les théorèmes de la théorie des fonctions tels que p. ex. le théorème d'Egoroff et le théorème de Fréchet sur les suites de fonctions mesurables. Table des matières: Chap. I. Espaces de la classe (S^*). § 1. La propriété de Lebesgue sur les ensembles. § 2. La propriété de Lebesgue sur les fonctionnelles. — Chap. II. Espaces des classes (U) et (U^*). § 3. L'hypothèse des alephs inaccessibles. § 4. La propriété de Fréchet sur les fonctionnelles. — Chap. III. Espaces des classes (B) et (B^*). § 5. Ensembles qui ne jouissent pas de la propriété de Lebesgue. § 6. Ensembles de Lusin. *Saks (Warszawa).*

Favard, J.: Sur la structure des continus rectifiables. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 15, 321—332 (1936).

For the sake of brevity, we consider the case of three-dimensional Euclidean space. C will denote a bounded continuum, and Π a bounded continuum which consists of a finite number of rectilinear segments. Given C_1, C_2 , define $\delta(C_1, C_2)$ = greatest lower bound of the distance P_1P_2 for P_2 fixed in C_2 and P_1 varying in C_1 , and $\varrho(C_1, C_2)$ = least upper bound of $\delta(C_1, C_2)$ for C_2 varying in C_1 . Then $|C_1, C_2| = |C_2, C_1| = \max(\varrho(C_1, C_2), \varrho(C_2, C_1))$ is the distance of C_1 and C_2 . If $|C, C_n| \rightarrow 0$, then we write $C_n \rightarrow C$. Given C , the length $L(C)$ is defined as the greatest lower bound of $\liminf L(\Pi_n)$ for all sequences Π_n such that $\Pi_n \rightarrow C$, where $L(\Pi_n)$ denotes the length of Π_n in the elementary sense. The author starts with the following remarks: (1) If P, Q are two points in C , then $L(C)$ is not less than the distance PQ . (2) Suppose that C contains a continuum of convergence C^* in the sense of Zarankiewicz (that is, we have in C a sequence $C_n \rightarrow C^*$ such that $C_i C_j = 0$ for $i \neq j$, $CC_n = 0$ for $n = 1, 2, \dots$, and C^* does not reduce to a single point). Then $L(C)$ cannot be finite. — It follows that a rectifiable C , that is a C with finite $L(C)$, is a rational curve in the sense of Menger, and that $L(C)$ reduces to the length of C in the classical sense whenever C is reasonably simple. — The author observes, in conclusion, that a similar treatment of the area seems to present serious difficulties. *Tibor Radó.*

Analysis.

Smirnow, W. J.: Einige Leningrader Arbeiten auf dem Gebiete der Analysis und ihrer Nachbargebiete. (*Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.*) *Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad* 1, 109—141 (1935) [Russisch].

Bericht über: Approximative konforme Abbildung, Gerschgorin (dies. Zbl. 7, 170), Kantorowitch (dies. Zbl. 8, 74; 10, 261). Randwertprobleme für mehrfach zusammenhängende Gebiete, Golusin (dies. Zbl. 9, 207). Ebene Aufgaben der Elastizitätstheorie, Diffraction, Michlin (dies. Zbl. 8, 355, 359), Kupradze (dies. Zbl. 8, 209, 313; 11, 405). Funktionalinvariante Lösungen der Wellengleichung, Propagation der Schwingungen, Smirnoff und Soboleff (dies. Zbl. 6, 118; 7, 277; 9, 209; 11, 352). Analytische Funktionen von Matrizen, Probleme von Riemann und Poincaré, Lappo-Danilevski (dies. Zbl. 9, 350; 11, 349). *Janczewski (Leningrad).*

Fabian, W.: Lebesgue complex integration and generalized differentiation. Philos. Mag., VII. s. 22, 523—534 (1936).

Corput, J. G. van der: Generalisations of Carleman's inequality. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 906—911 (1936).

Verf. beweist die folgende Verallgemeinerung der Carlemanschen Ungl. (Hardy, Littlewood and Pólya: Inequalities, pag. 249): Wenn

$$a_n \geq 0 \text{ (nicht alle } a_n = 0), \quad \beta_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = \sigma_n,$$

so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n})^{1/\sigma_n} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{n+1} \beta_n}{\sigma_n \beta_{n+1}} \right)^{\sigma_n/\beta_n} a_n. \quad (1)$$

Wird

$$k > -1, \quad \frac{\sigma_{n+1}}{\beta_{n+1}} - \frac{\sigma_n}{\beta_n} \leq \frac{1}{k+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

vorausgesetzt, so folgt aus (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n})^{1/\sigma_n} < e^{1/(k+1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad (2)$$

hierin ist $e^{1/(k+1)}$ die beste Konstante, wenn noch überdies bei unbeschränkt wachsendem n

$$\sigma_n \rightarrow \infty, \quad \frac{\sigma_n}{\beta_n} \rightarrow \infty, \quad \frac{\sigma_{n+1}}{\beta_{n+1}} - \frac{\sigma_n}{\beta_n} \rightarrow \frac{1}{k+1}.$$

Es gilt die Ungl. (2) z. B., wenn

$$k > -1 \quad \text{und} \quad \beta_n = \binom{n+k-1}{n-1} \quad \text{oder} \quad \beta_n = \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(n)};$$

ferner auch falls

$$-1 < k \leq 0 \quad \text{oder} \quad k \geq 1, \quad \beta_n = n^k,$$

und $e^{1/(k+1)}$ ist dann die beste Konstante. Ist aber $\beta_n = \frac{1}{n}$ und p eine beliebige Zahl, so gibt es immer positive Zahlen a_1, a_2, \dots mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n})^{1/\sigma_n} > p \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dagegen gilt für $\beta_n = \frac{1}{n}$ stets

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n})^{1/\sigma_n} < e^{1+C} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_n,$$

wo e^{1+C} die beste Konstante ist (C = Eulersche Konstante).

T. Ridder.

Zwirner, G.: Sulla integrazione, secondo Volterra di una matrice. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 723—727 (1936).

Verf. bemerkt, daß einige Ausführungen von B. Hostinský [Sur l'intégration des substitutions linéaires. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 221—225 (1935); dies. Zbl. 12, 347] bereits bei G. Peano [Atti Accad. Sci. Torino 22, 437—444 (1884)] auftreten. Die Beweise von G. Peano wurden unter überflüssigen Stetigkeitsvoraussetzungen durchgeführt, dürften aber mit geringen Änderungen auch unter den Voraussetzungen von B. Hostinský gelten.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Jackson, Dunham: Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. Duke math. J. 2, 423—434 (1936).

Let $p(x, y)$ be non-negative and integrable in the (finite) region R with $\int \int_R p(x, y) dx dy > 0$. By orthogonalizing the sequence $p^{\frac{1}{2}}, p^{\frac{1}{2}}x, p^{\frac{1}{2}}y, p^{\frac{1}{2}}x^2, p^{\frac{1}{2}}xy, p^{\frac{1}{2}}y^2, \dots$ (in the given order), we obtain a sequence of polynomials (*) $\{q_{nm}(x, y)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, \dots, n; q_{n0}, \dots, q_{nn}$ — of degree n) such that

$$\int \int_R p(x, y) q_{kl}(x, y) q_{nm}(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & |n-k| + |m-l| \neq 0 \\ 1, & |n-k| + |m-l| = 0 \end{cases}.$$

The present paper is devoted to a study of the formal properties of (*) resulting from their orthogonality properties, revealing analogies and differences between the case under discussion and that of one variable. Use is made of orthogonal transformations of (*), also of transformations $x' = Ax + By$, $y' = Cx + Dy$, leaving R and $p(x, y)$ invariant. In particular, the effect of symmetry of $p(x, y)$ is studied, and a general identity is established, which may be considered as taking place of Darboux formula for the case of one variable. A closing remark indicates the possibility of extending these results to trigonometric sums in two variables. *J. Shohat* (Philadelphia).

Haviland, E. K.: On the momentum problem for distribution functions in more than one dimension. II. Amer. J. Math. 58, 164—168 (1936).

Die vom Verf. früher aufgestellte Übertragung eines Satzes von M. Riesz (dies. Zbl. 13, 59) wird verallgemeinert, indem die Lösbarkeit des Systems

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int x^n y^m d_{xy} \Phi(E) = c_{nm} \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

durch eine Verteilungsfunktion $\Phi(E)$, deren Spektrum in einer fest gegebenen abgeschlossenen Menge C der Ebene enthalten ist, untersucht wird. Als notwendig und hinreichend erweist sich die Positivität der linearen Operation

$$P(x, y) = \sum a_{nm} x^n y^m \rightarrow \sum a_{nm} c_{nm}$$

für alle in C nichtnegativen Polynome. Die Fruchtbarkeit dieses Gedankens zeigt die elegante und einheitliche Herleitung der bekannten Lösungsbedingungen der verschiedenen bisher betrachteten Momentenprobleme [Hamburger: $C = (-\infty, \infty)$; Stieltjes: $C = (0, \infty)$; Hausdorff: $C = (0, 1)$, usw.). Dieselben folgen sofort aus den charakteristischen (parametrischen) Darstellungen der in diesen verschiedenen C nichtnegativen $P(x, y)$. (I. vgl. dies. Zbl. 13, 59.) *I. J. Schoenberg.*

Reihen:

Winants, Marcel: Remarque sur une certaine convergence diagonale. Bull. Sci. math., II. s. 60, 261—262 (1936).

Aus $u_{in} \rightarrow \alpha_i$, gleichmäßig in i , $\alpha_i \rightarrow \alpha$, folgt (bekannterweise) $u_{nn} \rightarrow \alpha$.

G. Cimmino (Napoli).

Fejér, Leopold: Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 18—59 (1936).

The paper deals with trigonometric and power-series and "remainder series", that is, with sums (the number of terms being finite or infinite)

$$\sum c_n \frac{\sin m\theta}{\cos \theta}, \quad \sum c_m z^m \quad (m=0, 1, 2, \dots; m=n+1, n+2, \dots; m=0, 2, 4, \dots; m=1, 3, \dots).$$

The fundamental assumption is made that the coefficients $\{c_m\}$ form a non-negative k -uple monotonic null-sequence, that is, $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = 0$ and the differences

$$\Delta^0 c_n, \Delta^1 c_n, \dots, \Delta^k c_n \left(\Delta^s c_n = \sum_{i=0}^s (-1)^i \binom{s}{i} c_{n+i}, \Delta^0 c_n \equiv c_n \right)$$

are all non-negative for $n=0, 1, 2, \dots$, k being a certain positive integer (or a completely monotonic sequence if $\Delta^k c_n \geq 0$ ($n=0, 1, \dots$) for all $k=0, 1, 2, \dots$). The analytical tools used are (I) (in common with Szegő's paper, cf. this Zbl. 14, 12) the splitting up of the above sums into two components, by changing properly the summation index; thus, for ex.,

$$\begin{aligned} c_0 \sin(n+1)\theta_2 + c_1 \sin(n+3)\theta + \dots &= \sin(n-1)\theta \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos 2(r+1)\theta \\ &+ \cos(n-1)\theta \sum_{r=0}^{\infty} c_r \sin 2(r+1)\theta; \end{aligned}$$

(II) a repeated application of Abel's transformation of sums of the form $\sum a_i b_i$. Extensive use is made of the non-negativeness of the sum

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin(2n+1)\theta,$$

and of similar properties of some other elementary trigonometric sums, for $0 < \theta < \pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. These simple analytical tools, ingeniously applied, enable the author to derive numerous results concerning the distribution of the zeros of the above series, also the positive or negative character of their partial sums of various orders, also the asymptotic behaviour of the remainder or certain types of

convergent series. [The infinite series $\sum_{r=0}^{\infty} u_r$ is said to be non-negative of order k , if its k -th partial sums $\{s_n^{(k)}\}$ ($n = 0, 1, \dots$) form a non-negative sequence. Here $s_n^{(0)} = \sum_{r=0}^n u_r$, $s_n^{(i)} = \sum_{r=0}^n s_r^{(i-1)}$, $i = 0, 1, \dots$] As an illustration, we cite the following results. (1) Given

the trigonometric series $f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r \cos r\theta$, with non-negative coefficients forming

a non-negative k -uple monotonic null-sequence. If $k = 2$, then $f(\theta)$ — continuous in $0 < \theta < 2\pi$ — is therein non-negative. $k = 4$ ($r = 1, 2, \dots$) implies $f(\theta)$ is monotonically decreasing for $0 < \theta < \pi$. (2) Given a series of "Heine's type" $c_0 \sin(n+1)\theta + c_1 \sin(n+3)\theta + \dots$ (n given positive integer). If the $c - s$ form a simply monotonic non-negative null-sequence, then the sum-function — continuous in $0 < \theta < \pi$ — has therein at least n zeros t_1, t_2, \dots, t_n , such that

$$(k-1)\pi/n < t_k < k\pi/n \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

If the $c - s$ form a triple monotonic non-negative null-sequence, then we have for its zeros in $0 < \theta \leq \pi/2$:

$$(m - \frac{1}{2})\pi/n < t_m < m\pi/n \quad \left(m = 1, 2, 3, \dots, n' = \left[\frac{n+1}{2}\right]; \quad t_{n'} = \frac{\pi}{2} \text{ for odd } n\right).$$

A direct application is then made to Legendre Polynomials. The author first shows that in Heine's sine-series expansion for Legendre Polynomial $P_n(\cos \theta)$ the coefficients form a completely monotonic non-negative null-sequence, and thus (2) yields at once Markoff-Stieltjes limitations for its zeros. — Application is further made to the theory of univalent functions. Illustration: if in the series

$$F(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

the $c - s$ form a 4-uple monotonic null-sequence, then $F(z)$ is univalent for $|z| < 1$.

J. Shohat (Philadelphia).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Cimmino, Gianfranco: Teoremi di confronto fra equazioni o sistemi di equazioni differenziali lineari del second'ordine. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 31—52 (1936).

Kürzlich hat G. Fubini (dies. Zbl. 7, 10) ein Kriterium angegeben, das garantiert, daß zwischen zwei Nullstellen einer Lösung von $y'' + 2p y' + q y = 0$ immer eine Nullstelle einer (beliebigen) Lösung von $Y'' + 2P Y' + Q Y = 0$ fällt. Dieses Kriterium wird hier erweitert. Ferner wird ein entsprechendes Kriterium für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und weiter für Systeme von partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus ausgesprochen. Rellich.

Boos, Pierre: Sur des propriétés de symétrie des courbes intégrales de systèmes différentiels du second ordre. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 769—771 (1936).

Pour le système différentiel $y' = f(x, y, z)$, $z' = g(x, y, z)$ l'aut. détermine la forme des fonctions f, g , pour que les courbes intégrales C et C' , définies resp. par les points $A(x_0, d, 0)$ et $A'(x_0, -d, 0)$, se correspondent par symétrie, A étant arbitraire (dans un certain domaine). Les théorèmes sont énoncés sans démonstrations. W. Stepanoff.

Stepanow, W. W.: Qualitative Methoden in der Theorie der Differentialgleichungen. (Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad 1, 206—224 (1935) [Russisch].

Verf. gibt einen Überblick über den modernen Stand der Theorie der qualitativen Untersuchungen von Differentialgleichungen. *A. Andronoff* u. *A. Witt* (Moskau).

Stepanoff, W.: Über die Stabilität im Jacobischen Sinne. Astron. J. Soviet Union 13, 435—449 u. deutsch. Zusammenfassung 449—454 (1936) [Russisch].

Es seien $x'' - \lambda y' = \gamma x$, $y'' + \lambda x' = \gamma y$ (1) die Gleichungen eines konservativen Systems mit zwei Freiheitsgraden; $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\gamma$ das Jacobische Integral (γ ist bis auf eine additive Konstante — die Jacobische Konstante — bestimmt). Es sei $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$ (s Bogenlänge) eine gegebene Bahnkurve. Birkhoff folgend, kann man mit Hilfe einer komplexen Transformation: $z \equiv x + iy = \varphi(s + in) + i\psi(s + in) \equiv f(s + in) = f(\xi)$ das System (1) auf folgende Form bringen:

$$\frac{d^2 s}{d\xi^2} - \bar{\lambda} \frac{dn}{d\xi} = \bar{\gamma}_s, \quad \frac{d^2 n}{d\xi^2} + \bar{\lambda} \frac{ds}{d\xi} = \bar{\gamma}_n, \quad \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dn}{d\xi}\right)^2 = 2\bar{\gamma},$$

dabei bedeutet $\bar{\gamma} = \gamma |f'(\xi)|^2$, $\bar{\lambda} = \lambda |f'(\xi)|^2$, $dt = d\xi |f'(\xi)|^2$. — Stellt man jetzt die Variationsgleichung für die Lösung $s = s_0(t)$, $n = 0$ auf (bei unverändertem s ; $\delta s = 0$), so erhält man $\delta n'' + J\delta n = 0$ (2). Nach Birkhoff kann die Bewegung unseres Systems

im dreidimensionalen Phasenraum $x, y, \varphi = \text{argt} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ betrachtet werden; die entsprechenden Gleichungen lauten $\dot{x} = \sqrt{2\gamma} \cos \varphi$; $\dot{y} = \sqrt{2\gamma} \sin \varphi$; $\dot{\varphi} = -\lambda + \frac{\gamma_x \cos \varphi - \gamma_y \sin \varphi}{\sqrt{2\gamma}}$.

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Größe J aus (2) als Funktion der Phasenvariablen x, y, φ zu berechnen. Ist J bekannt, so kann man den ganzen Phasenraum in Gebiete einteilen, in welchen $J > 0$ bzw. $J < 0$ ausfällt; die ersten nennt Verf. Gebiete der Stabilität im Jacobischen Sinne. Wenn eine Bahnkurve ganz im Gebiet der Stabilität verläuft, enthält sie zu jedem ihrer Punkte einen konjugierten Brennpunkt; wenn sie umgekehrt einem Labilitätsgebiet angehört, kann sie mit einer benachbarten ebenfalls diesem Gebiete angehörenden Bahnkurve mit demselben Anfangspunkt keinen weiteren gemeinsamen Punkt haben. — Zum Schluß betrachtet Verf. eine Reihe von Beispielen: 1. ein Feld ohne Corioliskräfte, 2. Bewegungen ohne Kraft in einem gleichmäßig rotierenden Koordinatensystem, 3. Keplerbewegung in einem ruhenden und rotierenden Koordinatensystem.

A. Andronoff u. *A. Witt* (Moskau).

Sakurai, Tokio: An extension of Heaviside's operational method. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 356—371 (1936).

This paper proposes to apply the operational method of Boole to the solution of homogeneous boundary value problems (the differential equations being linear). The author claims to have extended the "Heaviside method" in two directions (a) to differential equations with variable coefficients, (b) to boundary value problems (instead of initial value problems). The first claim seems invalidated by the remark (p. 357) that "the operator $\lambda - \lambda_1$ and $\lambda - \lambda_2$ are commutative" and the second by the apparent assumption (cf. $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ on p. 357) that the characteristic values of a boundary value problem may be varied continuously. *Murnaghan* (Baltimore).

Tonolo, A.: Zur Integration einer Klasse von Systemen linearer homogener partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. 41, 754—767 (1936).

Gegeben ein Diracsches System von n Gleichungen mit den n gesuchten Funktionen φ_h der Veränderlichen x_1, \dots, x_m, t ; $m \geq 3$ ungerade. Es wird die explizite Lösung gegeben für das Anfangswertproblem (φ_h gegeben für $t = 0$) und das Randwertproblem (φ_h gegeben für alle Zeiten t auf einer geschlossenen $(m-1)$ -dimensionalen Fläche des x_1, \dots, x_m -Raumes). Das gelingt mit Hilfe der Auflösungsformeln von Tedone, weil jede Lösung φ_h des Diracschen Systems der großen Schwingungsgleichung genügt.

Rellich (Marburg, Lahn).

- Gillis, Paul: Sur une classe d'équations aux dérivées partielles. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 835—854 (1936).
- Gillis, Paul: Sur certaines classes d'équations aux dérivées partielles. II. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 941—947 (1936).

Verf. betrachtet für jede einfache geschlossene Kurve c die Gleichung

$$\int_c \left[\left(A \frac{\partial z}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy - \left(B \frac{\partial z}{\partial x} + C \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx \right] + \iint_{(c)} \left(D \frac{\partial z}{\partial x} + E \frac{\partial z}{\partial y} + Fz \right) dx dy = 0,$$

wobei (c) das Innere von c bedeutet. Hat $z(x, y)$ stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung, so ist die Gleichung mit einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung gleichbedeutend; vom Verf. wird aber nur vorausgesetzt, daß die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $z(x, y)$ beschränkte, meßbare Funktionen sind. Die Gültigkeit von klassischen Formeln und Verfahren, die mit dem Dirichletproblem zusammenhängen, wird unter dieser Voraussetzung festgestellt. Es folgt die Ausdehnung auf den Fall eines Gleichungssystems.

G. Cimmino (Napoli).

Devisme, Jacques: Sur les équations relatives au prépotentiel. (59. sess., Nantes, 22.—27. VII. 1935.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 130—131 (1935).

Ein verallgemeinertes Potential sei erklärt durch $U(x, y, z) = \iint \mu(a, b, c) [\overline{MP}]^n d\sigma$, wobei \overline{MP} die Entfernung des Punktes $M(x, y, z)$ vom Punkt $P(a, b, c)$ bedeutet und die Integration über eine Fläche zu erstrecken ist. Für den Fall, daß die Gleichung dieser Fläche die Form $f(a, b, c) = 0$ hat, wo $f(a, b, c)$ ein Polynom ist, wird die Differentialgleichung für $U(x, y, z)$ abgeleitet.

Rellich (Marburg, Lahn).

Spezielle Funktionen:

Shabde, N. G.: On some results involving Bessel functions. Bull. Calcutta Math. Soc. 26, 9—14 (1935).

After the correction of two misprints the first two results may be written

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2x} \sec \frac{\pi\mu}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+2) J_{2n+1}(x) F_n(\mu) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(x \sin \theta) \tan^\mu \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 J_0(x\sqrt{u}) u^{\frac{\mu-1}{2}} (1-u)^{-\frac{\mu+1}{2}} du. \end{aligned}$$

There are similar misprints in the next section but the final result is correctly

$$\begin{aligned} 2r \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(r \cos \theta \cos \Phi) J_0(r \sin \theta \sin \Phi) \tan^\mu \Phi d\Phi \\ = \pi \sec \frac{\pi\mu}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n (4n+2) J_{2n+1}(r) P_n(\cos 2\theta) F_n(\mu). \end{aligned}$$

Another result is like the foregoing except that $2 \tan^\mu \Phi$ in the integral is replaced by $\cos \Phi \exp(-2k \sin \Phi)$ and $\pi \sec \frac{\pi\mu}{2} F_n(\mu)$ in the series by $I_{n+\frac{1}{2}}(k) K_{n+\frac{1}{2}}(k)$. The author obtains an equation

$$\int_0^{\infty} J_0(2xt) B(s+t, 1-2s) t^{1-2s} dt = \frac{x^{2s}}{2x^2-2} \quad x \geq 0, \quad 0 < 4s < 3$$

which includes one given previously by MacRobert, he obtains an integral for $K_{\nu+1}(x) K_\nu(x)$ analogous to Chaundy's integral for $K_\mu(x) K_\nu(x)$ and evaluates the integral

$$\int_0^1 P_m(1-2u^2) P_n(1-2u^2) e^{-2ku} du.$$

H. Bateman (Pasadena).

Phillips, E. G.: On a function which is self-reciprocal in the Hankel transform. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 35—36 (1936).

It is shown here that the function

$$x^{\frac{1}{2}+\mu}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(-\mu-1)}K_{\frac{1}{2}(\mu+1)}\{a\sqrt{x^2+a^2}\}$$

is self-reciprocal in the Hankel transform of order μ . It is also shown how the example fits into the general theory.

W. N. Bailey (Manchester).

Bell, E. T.: The arithmetical function $M(n, f, g)$ and its associates connected with elliptic power series. Amer. J. Math. 58, 759—768 (1936).

In einer früheren Arbeit, s. dies. Zbl. 10, 210, hatte Verf. die Bestimmung der Koeffizienten in den Potenzreihen für die elliptischen Funktionen $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{dn} x$, $x/\operatorname{sn} x$, $x^2/\operatorname{sn}^2 x$, $\wp x$ auf Rekursionsformeln zurückgeführt, in denen als Koeffizienten die Werte der zahlentheoretischen Funktion $N(n, f, g)$, der Lösungsanzahl der Diophantischen Gleichung

$$(2x_1+1)^2+\dots+(2x_g+1)^2+(2x_{g+1})^2+\dots+(2x_f)^2=n \quad (1)$$

in ganzen den Ungleichungen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, \dots , $x_g \geq 0$ (2) genügenden Zahlen, eine Rolle spielen. Jetzt entwickelt er für die Funktion $M(n, f, g) = 2^g N(n, f, g)$, die Lösungsanzahl von (1) ohne die Nebenbedingung (2), viele in Tabellen zusammengestellte Rekursionsformeln. Als Nebenresultat ergeben sich die Sätze: „Die Anzahl der Darstellung von n als Summe von b Quadraten ist darstellbar als Polynom vom Grade n in b mit rationalen Koeffizienten“ und „Die Anzahl der Darstellungen von $8n+a$ als Summe von a ungeraden Quadraten ist darstellbar als 2^a mal ein Polynom vom Grade n in a mit rationalen Koeffizienten“.

Bessel-Hagen.

Myrberg, P. J.: Über die analytische Darstellung der automorphen Funktionen bei gewissen fuchsoiden Gruppen. Ann. Acad. Sci. Fennicae A 48, Nr 1, 1—25 (1936).

Eine eigentlich diskontinuierliche (Hauptkreis-) Gruppe Γ von linear gebrochenen Substitutionen in der komplexen Variablen z mit unendlich vielen Erzeugenden S_0, S_1, S_2, \dots besitzt als Fundamentalbereich B ein unendlich vielseitiges Kreisbogenpolygon, dessen zum Hauptkreis orthogonale Seiten K_i, K'_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) durch S_i aufeinander bezogen sind. Es wird $p = 0$ vorausgesetzt. Sei $f(z)$ eine Hauptfunktion von Γ , die reelle Achse der Hauptkreis, der Grenzpunkt des B begrenzenden Polygonzuges im Unendlichen gelegen, H_ϱ der Orthogonalkreisbogen vom Radius $\varrho_n = \varrho$, der zwei durch S_n äquivalente Punkte auf K_n, K'_n miteinander verbindet. Aus einer zunächst hypothetischen Abschätzung der Geschwindigkeit, mit der sich der Mittelpunkt von H_ϱ bei wachsendem ϱ bewegt, folgt $|f(z)| > e^k \sqrt[4]{\log \varrho}$, wenn k eine geeignete Konstante bezeichnet und z in B bei hinreichend großem ϱ auf oder außerhalb H_ϱ liegt. Der Beweis beruht auf einem Ahlforsschen Gedankengang und bedient sich naturgemäß der Integralabschätzungen, wie sie in der Theorie der schlichten Funktionen auftreten. Bezeichnen R_i, R'_i die Radien von K_i und K'_i , q_i die Zahlen $\max\left(\frac{R_i}{R'_i}, \frac{R'_i}{R_i}\right)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), so ist die erwähnte Abschätzung erfüllt, falls die Ungleichung

$$q_0 q_1 q_2 \dots q_n \leq k' \sqrt[8]{\log \varrho_n}$$

mit irgendeinem konstanten $k' > 0$ besteht. Diese Ungleichung besagt ersichtlich, daß die Asymmetrie von B eine gewisse Grenze nicht überschreiten darf, und hat zur Folge, daß der sog. parabolische Fall vorliegt. Das für die analytische Darstellung der automorphen Funktionen wichtigste Hilfsmittel ist eine Abschätzung der vom Verf. mit $\frac{\Delta_s}{\delta_s}$ bezeichneten Größe nach unten, die folgendermaßen definiert wird: Es sei der Hauptkreis der Einheitskreis, B_N der den Nullpunkt enthaltende u. a. von den K_i, K'_i , $0 \leq i \leq N$, begrenzte Fundamentalbereich der von den $S_0, S_1, S_2, \dots, S_N$ erzeugten Untergruppe Γ_N von Γ . Durch Anwendung eines S von Γ_N auf B_N entsteht ein neuer Bereich SB_N ; δ_s ist die Länge des Einheitskreisbogens ($< \pi$), auf dem SB_N

steht, Δ_S des von den Bildern SK_i ($0 \leq i \leq N$) von K_i unbesetzten Einheitskreisbogens. Die weiteren Betrachtungen bedienen sich der in den früheren Arbeiten (P. J. Myrberg, Acta math. 59, 329, dies. Zbl. 5, 296, u. 65, 195, dies. Zbl. 13, 23) entwickelten Methode des Verf., durch die er zu dem in der Überschrift genannten Hauptresultat gelangt; zur Formulierung des Hauptresultats (*mutatis mutandis*) s. die genannten Referate. Petersson (Hamburg).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

● Soula, J.: L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. Mém. Sci. math. Fasc. 80, 63 pag. (1936).

Das Heft behandelt in zwei getrennten Teilen die beiden genannten Gegenstände. Bei den Entwicklungen über Integralgleichungen 1. Art werden samt ihrem Quadrat summable Funktionen zugelassen, und es wird von Funktionen mit dem Quadratintegral Null abgesehen; demgemäß kann sich die Darstellung im wesentlichen auf die Gruppe von Tatsachen und Bedingungen beschränken, die aus der Anwendung des Fischer-Rieszschen Theorems hervorgehen und in deren Mittelpunkt das bekannte Kriterium von E. Picard steht. Daneben werden verschiedene andere Möglichkeiten der Zurückführung der Integralgleichung 1. Art auf ein unendliches lineares Gleichungssystem gezeigt, das insbesondere durch Orthogonalisierung gelöst wird; den Abschluß bildet eine Zusammenstellung bekannter Beispiele. — Der zweite Teil gibt einen kurzen Überblick über die wichtigsten von Volterra und in unmittelbarem Anschluß an ihn gefundenen Eigenschaften vertauschbarer Kerne 2. Art (bei festen Integrationsgrenzen) und über ihre Anwendung zur Lösung gewisser linearer und nichtlinearer Integralgleichungen. Hellinger (Frankfurt a. M.).

Ostrowski, Alexandre: Sur une transformation de la série de Liouville-Neumann. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 602—604 (1936).

The Euler development

$$1 + z + z^2 + \dots = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4) \dots$$

suggests to the author a similar procedure relative to the Liouville-Neumann series for the resolvent kernel of the integral equation $\varphi(x) - \int K(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$ resulting in a reduction of the number of integrations. Thus if $S_1(x, y) = 1 + K(x, y)$, $S_{n+1}(x, y) = S_n(x, y) + \int S_n(x, t)k_n(t, y)dt$ with $k_0(x, y) = K(x, y)$. $k_{n+1}(x, y) = \int k_n(x, t)k_n(t, y)dt$, $S_n(x, y)$ gives $2^n - 1$ terms of the series of iterates of $K(x, y)$ by $2n - 1$ integrations. T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Fréchet, Maurice: Une expression générale du $n^{\text{ième}}$ itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de n . J. Math. pures appl., IX. s. 15, 251—270 (1936).

This paper gives a detailed exposition of results announced in an earlier note (see this Zbl. 10, 169). It develops that the convergence of the development of $K_n(P, M)$ is not only in the double mean, but also uniform in M for each P , and uniform in P for each M . Further that $\sum_{ij} \alpha_{ij}^2(n)/\mu_i\mu_j = \int \int K_n^2(M, P) dM dP$ while $\sum_i \alpha_{ij}^2(n)$ and $\sum_j \alpha_{ij}^2(n)$ converge for each n . Finally the expansion for $K_n(P, M)$ converges uniformly in P and M , if $\sum_i 1/\mu_i$ converges and $\sum_i |X_1(M)|/\mu_i$ and $\sum_j |Y_j(P)|/\mu_j$ each converge uniformly. Hildebrandt (Ann Arbor).

Kermack, W. O., and A. G. McKendrick: The solution of sets of simultaneous integral equations related to the equation of Volterra. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 462—482 (1936).

Man kann bekanntlich die Gleichungen

$$\Phi_s(x) + \sum_{r=1}^n \int_0^x \Phi_r(x - \xi) K_{sr}(\xi) d\xi = f_s(x), \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

mit Hilfe der Laplaceschen Transformation in geschlossener Form lösen. Verff. führen alle notwendigen Rechnungen explizit durch und untersuchen die Stabilität und die

asymptotischen Werte der Lösungen bei $x \rightarrow +\infty$. Zum Schluß diskutieren Verff. einige Anwendungen aus dem Gebiete der Epidemiologie. *A. Kolmogoroff.*

Duffahel, Maurice de: On a class of integral equations. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 13—20 (1936).

Genügt der Kern einer Integraltransformation $y(z) = \int_a^b f(z, t) v(t) dt$ einer partiellen Differentialgleichung $Z(z) \frac{\partial f}{\partial z} + T(t) \frac{\partial f}{\partial t} + (S(z) + \theta(t)) f = 0$, so führt sie Lösungen der Differentialgleichung $Tv' + (T' - \theta + h)v = 0$, wo h eine Konstante ist, bei geeigneter Bestimmung von a, b in Lösungen von $Zy' + (S + h)y = 0$ über. Damit können Lösungen von Integralgleichungen mit bestimmten Kernen $f(z, t)$ angegeben oder, wenn die Koeffizientenfunktionen so gewählt werden, daß beide gewöhnlichen Differentialgleichungen übereinstimmen, Eigenfunktionen von gewissen $f(z, t)$ gefunden werden. Diese Methode, die Verf. früher [Bull. Math. Supér. 32, suppl. (1932/33)] für einfache Beispiele durchgeführt hatte, wird auf eine Reihe weiterer Fälle angewandt. *Hellinger (Frankfurt a. M.).*

Bateman, H.: Two systems of polynomials for the solution of Laplace's integral equation. Duke math. J. 2, 569—577 (1936).

This paper proposes additional methods for the solution of the integral equation (1) $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} g(t) dt$, $f(x)$ being defined only for $x > 0$, a limitation imposed by conduction and radiation problems. The methods center in expansions of $f(x)$. Assuming that $f(x)$ is expansible in terms of functions of the type $S_n(x) = \frac{1}{x+1} P_n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $P_n(z)$ being the Legendre polynomial, the inverse functions U_n of S_n in the sense $S_n(x) = \int_0^\infty e^{-xt} U_n(t) dt$ form an orthogonal system relative to the function $1/(s+t)$ in the sense $\int_0^\infty \int_0^\infty U_n(s) U_n(t) ds dt / (s+t) = \delta_{mn} / (2n+1)$. If f and g are connected in (1) and suitably conditioned, then $\int_0^\infty S_n(x) f(x) dx = \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty U_n(s) ds dt / (s+t)$ so that if $\sum_1^m c_n S_n(x)$ converges to $f(x)$ in the mean square, then $g_m(t) = g(t) - \sum_1^m c_n U_n(t)$ with the same c_n converges to zero in the sense $\int_0^\infty \int_0^\infty g_m(s) g_m(t) ds dt / (s+t) \rightarrow 0$. For $c_n = z^n$ the method gives an exact solution of the integral equation. A second method replaces the Legendre polynomial functions $S_n(x)$ by functions involving polynomials of Laguerre, viz. $x^{-u-1} L_n^{u+\frac{1}{2}} u(x^{-1})$. A third suggestion is to utilize a Newtonian series expansion for $f(x)$, the function $g(t)$ being expressed in terms of polynomials closely related to the polynomials of Angelesco [Journ. de Math. s. IX, 2, 403 (1923) which satisfy the integral equation

$$x^{-1}(x^{-1} - 1)(x^{-1} - \frac{1}{2}) \dots \left(x^{-1} - \frac{1}{n}\right) = \int_0^\infty e^{-xt} A_n(t) dt. \quad \text{Hildebrandt.}$$

Dubreil-Jacotin, M.-L.: Sur la discussion des équations de ramification relatives à certains problèmes d'ondes. Application aux ondes dues aux inégalités du fond. Bull. Soc. Math. France 64, 1—24 (1936).

1. The author gives sufficient conditions for the existence of a unique solution ($\equiv 0$) of certain types of non linear integral equations near a parametric value for which there is ramification and by using them simplifies the study of permanent two-dimensional periodic waves. The case in which the foregoing simple conditions do not allow a discussion of the equations of ramification is then considered and the undulations of the free surface of a liquid flowing over a wavy bed are found uniquely even in the critical case when $2\pi c^2 = g\lambda \operatorname{th}(2\pi H/\lambda)$ and the linearised problem is impossible.

The analysis is based on the work of Lichtenstein and some previous work of the author. H. Bateman (Pasadena).

Funktionentheorie:

Robinson, L. B.: A functional equation satisfied by a lacunary function. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 247—249 (1936).

L'A. indique une équation différentielle dont l'intégrale, holomorphe dans le cercle-unité, admet sa circonférence comme coupure. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Rosenblatt, Alfred, et Stanislaw Turski: Sur la représentation conforme de domaines plans. Bull. Sci. math., II. s. **60**, 309—320 (1936).

Es sei \mathfrak{B} ein einfach zusammenhängender Bereich. Kantorowitch (Sur la représentation conforme, vgl. dies. Zbl. **8**, 74 u. **9**, 261) hat ein rechnerisches Verfahren angegeben, das aus der Kenntnis einer Funktion, welche den Einheitskreis $|\zeta| \leq 1$ konform auf \mathfrak{B} abbildet, die Abbildung von $|\zeta| \leq 1$ auf gewisse (von einem Parameter λ abhängige) Nachbarbereiche \mathfrak{B}_λ zu bestimmen gestattet. — Verf. wenden dies Verfahren auf den Fall an, daß \mathfrak{B} der Einheitskreis $|z| \leq 1$ ist und \mathfrak{B}_λ durch eine radiale Variation entsteht, genauer von der Kurve $z = e^{it} \left[1 + \lambda \sum_0^\infty (\alpha_n \cos nt - \beta_n \sin t) \right]$ berandet ist. — Sie verifizieren auf diese Weise eine von Julia [Ann. École norm. sup. **39**, 1—28 (1922)] mit Hilfe des Funktionalkalküls gegebene Formel für die Variation einer konform Abbildenden. *Rogosinski*.

Warschawski, S. E.: On the preservation of angles at a boundary point in conformal mapping. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 674—680 (1936).

Wird das Innere einer Jordankurve auf den Einheitskreis konform abgebildet, so ist die Abbildung in einer Ecke des Randes bekanntlich winkelproportional. Verf. beweist nun folgende Verallgemeinerung des Satzes: Es sei R ein einfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet, dessen Rand den Punkt $w = 0$ als erreichbaren Randpunkt enthält. Es existiere ein Kreis $|w| < \rho$, so daß der innerhalb dieses Kreises liegende Teil des Randes von R in den Winkeln (1) $|\arg w - h_+| \leq k_+$, $|\arg w - h_-| \leq k_-$, ($h_- \leq h_+$), liegt. Es sei ferner L ein in R verlaufender Jordanscher Kurvenbogen, der den Punkt $w = 0$ mit einem außerhalb des Kreises $|w| = \rho$ gelegenen Randpunkt von R verbindet und somit R in zwei Teilgebiete R_1 und R_2 zerlegt. Alle in $|w| < \rho$ liegenden Randpunkte von R_1 , welche nicht auf L liegen, seien in einem der Winkel (1) und die von R_2 in dem anderen gelegen. Die Funktion $w = w(z)$ bilde den Kreis $|z - 1| < 1$ auf R konform so ab, daß $z = z(w) \rightarrow 0$, wenn w längs L gegen 0 strebt. Es sei noch

$$H(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) h_+ + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) h_- \right], \quad K(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) k_+ + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) k_- \right].$$

Dann ist $-\varepsilon - K(\arg z) \leq \arg w(z) - H(\arg z) \leq K(\arg z) + \varepsilon$, wo $\varepsilon \rightarrow 0$, wenn $z \rightarrow 0$ in einem festen Winkel $|\arg z| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. — Ein analoger Satz ist von A. Ostrowski (dies. Zbl. **12**, 25) für den Fall bewiesen worden, wo der Rand von R in der Umgebung von $w = 0$ eine Jordankurve ist. Unter spezielleren Annahmen ist das Resultat schon von W. Gross [Math. Z. **2**, 278 (1918)] hergeleitet worden. *V. Paatero* (Helsinki).

● **Gloden, A.:** Sur les surfaces de Riemann. Luxembourg: Linden & Hansen 1935. 95 S.

Elementary treatise on Riemann surfaces and some Abelian integrals. The headings of the chapters are: I. Construction of Riemann surfaces for some functions. II. Study of functions defined on a Riemann surface. III. Riemann surfaces and conformal representation. — Algebraic surfaces with two sheets and the corresponding integrals are studied at some length. In the third chapter a survey of the theory of conformal representation and uniformization is given without proofs. *L. Ahlfors*.

Onicescu, Octav: Les fonctions holotropes. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 33—52 (1936).

Un certain nombre de propriétés et d'exemples de fonctions holotropes; en particulier ce résultat démontré d'abord pour une fonction holotope polynomiale $[X = P(x, y); Y = Q(x, y)]$: Lorsque (x, y) parcourt tout le plan, le domaine engendré par le point fonction (X, Y) recouvre lui aussi tout le plan, ce qui constitue pour les fonctions holotropes polynomiales un théorème de d'Alembert. La fin de ce mémoire comporte l'extension à trois dimensions des fonctions holotropes, ainsi qu'une généralisation du théorème de Picard pour les fonctions holotropes entières à trois dimensions.

E. Blanc (Paris).

Onicescu, Octave: La topologie de la fonction d'un point du plan ou de l'espace. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 63—68 (1935).

L'auteur expose les points de vue qui l'ont conduit à envisager ce qu'il appelle les «fonctions holotropes» (voir définition ce Zbl. 12, 170) ces fonctions devant engendrer des transformations analytiques planes ayant certains des caractères topologiques des transformations définies par les fonctions holomorphes. — L'auteur termine en indiquant (de façon schématique) une nouvelle démonstration du théorème de Picard mettant en évidence «le fait topologique essentiel en lequel réside ce théorème».

E. Blanc (Paris).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Kolmogoroff, A. N.: Über einige gegenwärtige Strömungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie. (Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad 1, 349—358 (1935) [Russisch].

Copeland, Arthur H.: Predictions and probabilities. Erkenntnis 6, 189—203 (1936).

Verf. berichtet über die Grundlagen einer statistischen Theorie der Wahrscheinlichkeit, die er in seinen im Literaturverzeichnis angegebenen Arbeiten ausführlicher entwickelt und im einzelnen mathematisch durchgeführt hat. — Von der bekannten statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie von R. v. Mises unterscheidet sich Copelands Aufbau dadurch, daß er von schwächeren Voraussetzungen ausgeht: a) v. Mises setzt für statistische Reihen („Kollektiv“) die Konvergenz der relativen Häufigkeiten der verschiedenen möglichen Ergebnisse voraus (Grenzwertaxiom) und definiert die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ergebnisses in der betreffenden Reihe als seinen Häufigkeitslimes. C. dagegen legt zunächst nur die „Annahme“ (Definition) zugrunde, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gleich einem Häufigkeitswert der relativen Häufigkeit des betreffenden Ergebnisses in der Reihe ist („Assumption 2“). — Während aus bekannten Gründen eine im Sinne der v. Misesschen limes-Definition interpretierte empirische Wahrscheinlichkeitsaussage weder verifiziert noch falsifiziert werden kann, meint C., daß die genannte Definition eine Wahrscheinlichkeitsaussage empirisch wenigstens verifizierbar, wenngleich nicht falsifizierbar mache. — b) Das zweite der beiden Axiome der v. Misesschen Theorie, das Regellosigkeitsaxiom, fordert die Invarianz der Wahrscheinlichkeiten in einem Kollektiv bei Übergang zu irgendeinem neuen Kollektiv, das aus dem ursprünglichen durch eine „Stellenauswahl“ ausgesondert wird, d. h. durch eine Auswahl, die nicht auf die Ergebnisse der auszuwählenden Glieder Bezug nimmt. C. führt hier eine schwächere Forderung („Assumption 3“) ein: er verlangt Invarianz der Wahrscheinlichkeit nur mit Bezug auf jede beliebige periodische Stellenauswahl. Eine statistische Reihe, die diese eingeschränkte Regellosigkeitsforderung befriedigt, ist empirisch nicht von einer solchen unterscheidbar, die dem strengeren v. Misesschen Regellosigkeitsaxiom genügt; für empirische Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie genüge also die abgeschwächte Regellosigkeitsforderung. Diese hat zudem in formalmathematischer Hinsicht den Vorzug, daß sich mathematische Folgen konstruieren lassen, die den Copelandschen Bestimmungen genügen, wodurch die Widerspruchsfreiheit dieser Bestimmungen ge-

sichert ist; eine entsprechende Konstruktion ist in der v. Misesschen Theorie nicht möglich. (Die Frage, in welchem Umfange die Sätze der v. Misesschen Wahrscheinlichkeitstheorie auf der neuen Basis bewiesen werden können, wird nicht erörtert.)

Autoreferat.

Misès, R. de: Sul concetto di probabilità fondato sul limite di frequenze relative. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 235—255 (1936).

Cantelli, F. P.: Considerazioni su alcuni concetti esposti nella introduzione della nota di R. de Misès. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 256—264 (1936).

R. de Misès zeigt ausführlich, wie eine Reihe von F. P. Cantelli in seinen Pariser Vorlesungen (vgl. dies. Zbl. 11, 125) aufgeworfener prinzipieller Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Standpunkte der Häufigkeitstheorie zu beantworten ist. Das veranlaßt Cantelli, einige grundsätzliche Unterschiede hervorzuheben, die zwischen diesem Standpunkt und dem seinigen bestehen sollen. *A. Khintchine.*

Koeppler, H.: Das Wahrscheinlichkeitsgesetz zweier wahrer einander zugeordneten Fehler und einige mit diesem zusammenhängende Betrachtungen. Metron 12, 35—65 (1936).

Though this is an expository paper, containing no new results, it will be useful to the student in making more accessible certain classical methods in deriving the normal bi-variate frequency function. In particular clear distinction is made between the distributions of the true and apparent errors of measurement. This distinction is also used in rederiving Student's t -distribution function. *C. C. Craig* (Ann Arbor).

Irwin, J. O.: Recent advances in mathematical statistics (1934). J. Roy. Statist. Soc., N. s. 99, 714—769 (1936).

Craig, A. T.: A certain mean-value problem in statistics. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 670—674 (1936).

x_1, \dots, x_n seien normalverteilte stochastische Veränderliche mit dem Mittelwert Null und der Quadratabweichung σ^2 . Es wird der Mittelwert s^2 von $x_1^2 + \dots + x_n^2$ berechnet, wenn $m < n$ Linearkombinationen zwischen den x_i vorgegebene Werte λ_i annehmen. Sind alle $\lambda_i = 0$, so ist $s^2 = (n - m) \sigma^2$. *W. Feller* (Stockholm).

Udny Yule, G.: On a parallelism between differential coefficients and regression coefficients. J. Roy. Statist. Soc., N. s. 99, 770—771 (1936).

Kullback, S.: A note on the multiple correlation coefficient. Metron 12, 67—72 (1936).

The author obtains by direct computation three estimates of variance for the analysis of the multiple correlation coefficient from uncorrelated material, without introducing arguments such as was done by R. A. Fisher, Proc. Intern. Math. Congress (Toronto) (1924), 2, 805—813 involving the number of degrees of freedom. He obtains a Fisher "z-distribution". The results are illustrated by an application to the occurrence of the letters E, D, N, R, S, T , in ordinary English text. The paper is based on previous results of R. A. Fisher, H. L. Rietz, J. Wishart, J. Neyman and E. S. Pearson, and of the author. *Albert A. Bennett* (Providence).

Risser, R.: Essai sur la théorie de l'assurance invalidité. Ann. Univ. Lyon, Sect. A. Sci. Math. et Astron., III. s. Fasc. 1, 89—100 (1936).

En représentant le nombre des invalides d'âge x , dont invalidité remonte à l'âge y par une fonction $i(x, y)$, l'auteur va exprimer cette fonction par une somme d'expressions analogues à $\alpha x^\alpha \beta^y$ en les substituant dans une relation de récurrence entre les valeurs successives de $i(x, y)$. Introduisant dans la définition une fonction inconnue de $(y - x_0)$, ainsi que des puissances de $(x - y)$ et de $(y - x_0)$ il trouve une autre forme de $i(x, y)$. On montre que si l'on confondait le taux instantané de sortie du groupe des invalides avec le taux instantané de mortalité, on aboutirait à une équation fonctionnelle, qui ne donnerait pas l'image vrai du phénomène. L'auteur appelle enfin l'attention des actuaires sur l'emploi de formules spéciales d'ajustement dans le problème des tables par âges à l'entrée des invalides. *Janko* (Praha).

Geometrie.

Barrau, J. A.: Casts of points, rays and planes. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 955—961 (1936).

Verf. nennt Wurf eine geordnete Menge von $n + 3$ zu je $n + 1$ linearer Punkte im R_n , deren analytische Beschreibung durch die projektiven Koordinaten (a_i) des letzten Punktes im Koordinatensystem der ersten $n + 2$ gegeben wird. Ebenso bilden $n + 2$ geordnete Strahlen durch einen Punkt einen Wurf, nämlich den Punktwurf in einem R_{n-1} -Schnitt. Dann gilt der Satz: Alle Punkte, von denen $n + 2$ gegebene Punkte in einem festen Wurf projiziert werden, liegen auf einer Normkurve \mathcal{C}_n , eine Verallgemeinerung bekannter Tatsachen für $n = 2, 3$. Nennt man weiterhin $n - 1$ Ebenen durch eine Gerade einen Wurf, so lautet ein entsprechender Satz: Alle Geraden, die $n - 1$ gegebene Punkte in einem gegebenen Wurf projizieren, bilden ein n -dimensionales Geradensystem der Ordnung $n - 1$. Zu einer interessanten Gruppe führt schließlich die Gesamtheit aller Würfe, dargestellt durch Punkte (a_i) des R_n , die aus einem gegebenen durch Vertauschung der Anordnung hervorgehen. Dies führt für $n > 1$ zu einer Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{(n+3)!}$ durch Projektivitäten und Cremonatransformationen in den (a_i) . Die damit verbundene Involution der Ordnung $(n + 1)!$ des R_n wird für $n = 2$ noch besonders betrachtet, und ihre Fixelemente, Doppelkegelschnitte, 4-, 6- und 10fachen Punkte werden angegeben. *Burau.*

Richmond, H. W.: On extensions of Pascal's theorem. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 5, 55—62 (1936).

Die Arbeit verallgemeinert den Pascalschen Satz der Ebene, wie er für sechs Punkte eines (nichtentarteten) Kegelschnitts besteht, auf die Gesamtheit von $2(n + 1)$ Punkten der rationalen normalen Kurve n -ter Ordnung im R_n . — Die rechnende Methode der Beweisführung für diesen allgemeinen Fall wird an den entsprechenden Aussagen im R_3 und im R_4 dargetan und dann verallgemeinert. Die Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes für den R_3 lautet dabei: Sind P_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) acht Punkte einer Raumkubik und werden sie als Eckpunkte eines achteitigen Polygons angenommen, so sind die vier Schnittgeraden gegenüberliegender Ebenen des Polygons Erzeugende (derselben Schar) eines Hyperboloids. Analog lauten die Aussagen für die höheren Räume. — Sodann befaßt sich der Verf. mit den Umkehrungen dieser Aussagen, von denen einige bereits durch Arbeiten von Dobriner (Acta math. 12, 339—361), Zeuthen (ebd. 362—366), Schroeter (ebd. 14, 207—209) und insbesondere von T. Weddle [Camb. Dubl. math. J. 5, 58—69 (1850)] als gültig nachgewiesen sind. Die Beweise für die Weddlesche Umkehrung im R_3 und R_4 werden dabei vom Verf. erneut synthetisch geführt. *Steck (München).*

Srinivasiengar, C. N.: Lines of striction on the quadric and on some other scrolls. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 49—56 (1936).

Geometrische Bestimmung der Striktionslinie der Quadriken, der allgemeinen Regelfläche 3. Ordnung und einiger Regelflächen 4. Ordnung; mit Betrachtung besonderer Fälle. Darüber gibt es schon eine ausgedehnte Literatur [Enzykl. d. math. Wiss.: O. Staude, III C 2, n. 37; K. Zindler, III C 8, ¹⁴⁵⁸]. *E. G. Togliatti.*

Arvesen, Ole Peder: Sur la solution de Laguerre du problème d'Apollonius. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 704—706 (1936).

Anwendung der Laguerreschen Methode (dies: Zbl. 15, 37) für die Konstruktion des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt, im Falle wo die drei Kreise die Achse der benutzten Geradentransformation schneiden. Es handelt sich dann um die Aufgabe, durch drei gegebene imaginäre Punkte (x_i, y_i) einen Kreis zu legen (x_i reell, y_i rein imaginär); die Transformation $x = x'$, $y = iy'$ verwandelt sie in die andere Aufgabe, durch drei gegebene reelle Punkte eine gleichseitige Hyperbel mit gegebenen Asymptotenrichtungen zu legen. *E. G. Togliatti (Genova).*

Weiss, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. V. Anwendungen. (Haupttangentenkurven und Krümmungslinien.) Deutsche Math. 1, 544—560 (1936).

III. vgl. dies. Zbl. 14, 129.

Weyssenhoff, J. W., et A. Bielecki: Quaternions, 4-dimensional rotations and Cayley's formula. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A 1936, 216—227.

Die Arbeit enthält eine einfache Ableitung der Cayleyschen Darstellung der Bewegungen des R_4 durch Quaternionen. Zunächst werden die Quaternionen selbst als Kombinationen von Vektoren und Skalaren eingeführt und alsdann mittels derselben einige Begriffe der R_4 -Geometrie, wie Gleichung der Ebenen und Senkrechtstehen von Ebenen aufeinander, ausgedrückt. Unter Verwendung der Quaternionenformel für R_3 -Rotationen und der bekannten Aufspaltung der Rotationen im R_4 in die zweier total senkrechter Ebenen wird dann eine einfache Ableitung der Formel für die Drehung $x = pxq$ angegeben, wo p und q Einheitsquaternionen bedeuten. Zum Schluß wird noch auf die Bewegungen mit ∞^2 Fixebenen eingegangen, bei denen p oder $q = \pm 1$ ist.

Bureau (Hamburg).

Stoyanoff, A.: Sur les cycloïdes. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 32, 15—36 (1936) [Bulgarisch].

Nous avons donné une méthode pratique, fondée sur l'emploi des nombres complexes, pour obtenir les éléments d'une cycloïde quelconque connaissant son équation: base, roullante et position du point générateur dans le plan du cercle mobile. Nous avons appliqué la méthode à trois exemples: limaçon de Pascal, enveloppe des droites de Simpson d'un triangle, ondes trochoïdales de Gerstner. Autoreferat.

Kershner, Richard: On the addition of convex curves. Amer. J. Math. 58, 737 bis 746 (1936).

Die Addition von konvexen Kurven wurde von H. Bohr als Hilfsmittel für die Untersuchung der Werteverteilung von Dirichletschen Reihen eingeführt. Die Summe von endlich vielen konvexen Kurven C_i ist entweder ein konvexer Bereich oder ein Ringbereich, der von zwei konvexen Kurven begrenzt wird. Eine Untersuchung des äußeren Randes auf Grund Brunn-Minkowskischer Sätze wurde von Haviland (dies. Zbl. 7, 222) gegeben. Neulich haben Bohr und Ref. (dies. Zbl. 13, 114) in dem bei der Untersuchung der Riemannschen Zetafunktion vorliegenden Spezialfall die Frage nach dem Auftreten eines inneren Randes untersucht. Verf. behandelt diese Frage im Fall beliebiger konvexen Kurven und gibt für den inneren Rand eine ähnliche Diskussion wie Haviland für den äußeren.

B. Jessen (Kopenhagen).

Vincensini, P.: Sur les domaines vectoriels des corps convexes. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 373—383 (1936).

Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit Sätzen über den Vektorkörper, die in den seit langem bekannten Sätzen über Linearkombinationen konvexer Körper enthalten sind. Im zweiten werden die Beweise für die in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 12, 272) mitgeteilten Resultate ausgeführt.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Fenchel, Werner: Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 647—650 (1936).

Entre les volumes mixtes de n corps convexes, on n'avait pas encore réussi à démontrer l'inégalité suivante qui, comme on le sait, domine toute la théorie de Minkowski:

$$V_{123\dots n}^2 \geq V_{113\dots n} \cdot V_{223\dots n}$$

M. Fenchel a réussi à le faire d'une façon très heureuse ainsi qu'en témoigne le schéma de démonstration esquissé dans cette note.

J. Favard (Grenoble).

Fenchel, Werner: Généralisation du théorème de Brunn et Minkowski concernant les corps convexes. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 764—766 (1936).

Soient $K_0, K_1, C_1, C_2, \dots, C_{n-p}$ des corps convexes dans l'espace à n dimensions et $K_\vartheta = (1 - \vartheta) K_0 + \vartheta K_1$, $0 \leq \vartheta \leq 1$. La racine p^e du volume mixte

$V(\underbrace{K_\vartheta, \dots, K_\vartheta}_p, C_1, \dots, C_{n-p})$ est une fonction concave ou linéaire par rapport à ϑ .

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'inégalité générale obtenue par l'auteur dans sa précédente note (voir le réf. préc.). En employant une méthode utilisée par le Rf. il obtient une amélioration de cette inégalité, qui permet de démontrer que dans le cas des sphères C_1, \dots, C_{n-p} la linéarité de la dite racine entraîne que les corps K_0 et K_1 sont homothétiques.

J. Favard (Grenoble).

Varga, O.: Integralgeometrie. XIX: Mittelwerte an dem Durchschnitt bewegter Flächen. Math. Z. 41, 768—784 (1936).

F_1 sei eine bewegliche Fläche und F_2 eine feste. Beide durchdringen sich in einer Kurve K , deren Bogenelement \dot{s} sei. Den Winkel, den die Flächenelemente von F_1 und F_2 in einem Punkte von K bilden, heißen wir σ . Dann kann man längs K z. B. folgendes Integral $J = \int (\dot{\sigma}/\dot{s})^2 \dot{s}$ bilden. Dies J kann man über alle Lagen von F_1 „mitteln“, indem man bildet

$$M\left\{\left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{s}}\right)^2\right\} = \int J \dot{F}_1 = \int \left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{s}}\right)^2 \dot{F}_1 \dot{s}.$$

Den Integranden $(\dot{\sigma}/\dot{s})^2$ kann man auch ersetzen durch die Krümmung oder Torsion von K oder durch Potenzen davon und andere ähnliche Größen. Der Verf. gibt in allen diesen Fällen Formeln für die entsprechenden Mittelwerte an. In unserem Beispiel ergibt sich:

$$M\left\{\left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{s}}\right)^2\right\} = \frac{\pi^2}{4} \left(O_2 \int \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R''_1} \right)^2 \dot{O}_1 + O_1 \int \left(\frac{1}{R'_2} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 \dot{O}_2 \right).$$

Darin bedeuten O_i die Oberfläche, \dot{O}_i das Flächenelement und R'_i und R''_i die Hauptkrümmungsradien von F_i . Nimmt man σ als konstant an, also $(\dot{\sigma}/\dot{s})^2 = 0$, so folgt $R'_1 = R''_1$ und $R'_2 = R''_2$, d. h. die Flächen sind Kugeln. — Die Berechnung der Mittelwerte gelingt durch Umformung des Differentials $\dot{F}_1 \dot{s}$ gemäß der Blaschkesehen „Grundformel“ (vgl. nachsteh. Ref.) — Druckfehler: In den Formeln (10), (23) und (24) muß es „cos“ statt „cos²“ heißen.

W. Maak (Hamburg).

Blaschke, W.: Un contributo alla cinematica integrale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 721—722 (1936).

Blaschke, W.: Integralgeometrie 17. Über Kinematik. Bull. Soc. Math. Grèce 17, 12 S. (1936).

In der ersten Arbeit werden einige Resultate der zweiten mitgeteilt. — Es seien \mathfrak{F}_1 eine feste, \mathfrak{F}_2 eine starr bewegliche Fläche im Raume. \mathfrak{L}_i bezeichne die Dichte eines der Schnittkurve der Flächen angehörigen Linienelements in \mathfrak{F}_i (im Sinne des Verf., vgl. dies. Zbl. 14, 119). Ferner sei σ der Schnittwinkel der Flächen im Trägerpunkt des Linienelementes und s die Bogenlänge der Schnittkurve. Dann gilt $\mathfrak{F}_2 \dot{s} = \sin^2 \sigma \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \dot{\sigma}$, wo \mathfrak{F}_2 die kinematische Dichte von \mathfrak{F}_2 und \dot{s} und $\dot{\sigma}$ die Differentiale von s und σ bedeuten. Von dieser „Hauptformel“ werden mehrere Anwendungen gemacht, von denen die folgenden genannt seien: \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 seien beschränkte, von endlich vielen stetig gekrümmten Flächen berandete Gebiete; \mathfrak{G}_1 sei fest, \mathfrak{G}_2 starr beweglich. M_i und $M(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ seien die Integrale der mittleren Krümmung der Berandungen von \mathfrak{G}_i bzw. vom Durchschnitt von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 . Ferner seien O_i und V_i Oberfläche bzw. Volumen von \mathfrak{G}_i . Dann gilt die für konvexe \mathfrak{G}_i von Santaló (Integralgeometrie V, vgl. dies. Zbl. 14, 125) gefundene Formel

$$\int M(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) \dot{\mathfrak{G}}_2 = 8\pi^2 \left(M_1 V_2 + \frac{\pi^2}{16} O_1 O_2 + V_1 M_2 \right),$$

wo $\dot{\mathfrak{G}}_2$ die kinematische Dichte von \mathfrak{G}_2 bezeichnet und über alle Lagen von \mathfrak{G}_2 zu integrieren ist. Ähnlich ergibt sich die analoge Formel für die Gaußsche Totalkrümmung, die kinematische Hauptformel (vgl. dies. Zbl. 14, 274, Blaschke). Schließlich werden sehr einfach einige Ergebnisse von Varga (vgl. vorsteh. Referat) wieder-gewonnen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Blaschke, Wilhelm: *Integralgeometrie. XX. Zur elliptischen Geometrie.* Math. Z. **41**, 785—786 (1936).

Es sei F eine geschlossene Fläche vom Geschlecht p im elliptischen Raume, O ihre Oberfläche und O' die ihrer Polarfläche. Die Gaußsche Curvatura integra von F ist einerseits bekanntlich gleich $4\pi(1-p)$, andererseits aber, wie hier zunächst für Polyeder mit Hilfe der von Fubini und Study eingeführten sphärischen Abbildung durch Cliffordsche Parallelen gezeigt wird, gleich $O + O'$. (Diese Zerlegung der Gaußschen Krümmung stimmt übrigens mit der üblichen in erzwungene und relative Krümmung überein.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

Saks, S.: *Sur un théorème de M. Roger.* Fundam. Math. **27**, 151—152 (1936).

Verf. zeigt, daß folgender Satz von Roger eine leichte Folgerung von ihm in einer vorangehenden Note bewiesener Resultate (vgl. dies. Zbl. **13**, 298) ist: Für jede Menge R des dreidimensionalen euklidischen Raumes ist die Menge P der Punkte von R , zu denen es eine Ebene gibt, die zu der Kontingens von R in a fremd ist, Vereinigungsmenge endlich oder abzählbar vieler rektifizierbarer Bögen, und von einer Teilmenge der Länge O abgesehen besitzt P in jedem Punkte eine Tangente.

H. Busemann (Princeton, N. J.).

Algebraische Geometrie:

Lefschetz, S.: *Algebraische Geometrie: Methoden, Probleme, Ziele.* (Leningrad, Sitzg. v. **24.—30. VII. 1934.**) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad **1**, 337—349 (1935) [Russisch].

Der Vortrag enthält einen kurzen Bericht über Gegenstände der algebraischen Geometrie, die in ihren wesentlichsten Teilen nach Klein als eine Untersuchung der Invarianten birationaler Transformationen aufgefaßt wird. Zu Beginn bespricht der Verf. die Theorie der Punktgruppen auf Kurven in algebraischer Behandlung unter bloßer Annahme der lokalen Potenzreihenentwicklung, um dann auf die Abelschen Integrale und die zugehörigen Periodenrelationen einzugehen, mit einem besonderen Hinweis auf die transzendente Behandlung der Korrespondenzen auf Kurven und die Theorie der Riemannschen Matrizen. Darauf folgt ein Überblick über die algebraischen Flächen, und zwar hauptsächlich ihrer Abelschen Integrale und der Severischen Basistheorie, sowie ein Hinweis auf die Untersuchungen von Hodge und die Severische Punktgruppentheorie. Nach einer kurzen Andeutung der größtenteils ungelösten Fragen für mehrere Dimensionen schließt der Vortrag mit einer besonderen Unterstreichung der nach Ansicht des Verf. überall hervortretenden größeren Tiefe und Durchschlagskraft der transzendent-topologischen Untersuchungsart vor rein algebraischen Methoden.

Bureau (Hamburg).

Togliatti, E. G.: *Introduction à la théorie des séries d'équivalence sur une surface algébrique.* Enseignement Math. **35**, 256—268 (1936).

Dans cette introduction je me propose de présenter, le plus rapidement possible, la définition géométrique des séries d'équivalence sur une surface algébrique, et d'exposer quelques-unes des liaisons entre la théorie dont il est question et la Topologie des surfaces algébriques.

Autoreferat.

Head, J. W.: *The Veronesean of quadrics and associated loci.* Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. **5**, 14—25 (1936).

The author considers the linear mapping of the tangential quadrics of space on the points of S_9 . To the singular quadrics (i.e. conics, point-pairs and repeated points) correspond points of loci V_3^4 , V_6^{10} , and V_8^8 respectively. A line lying in S_9 represents a pencil of tangential quadrics. By suitably specialising the relation of the line to the loci V_3^4 , V_6^{10} and V_8^8 the various special types of quadric pencil may be obtained. The author then considers the conditions for a (tangential) net of quadrics to be a net of first polars of a surface of the third class. If l is a line in S_9 , representing a pencil Ω of quadrics, those quadrics which belong to a polar net containing Ω are mapped on the points of a quadric solid-cone in S_9 whose vertex is the unique S_3

through l which meets V_3^8 in four points. If Q is such a quadric, it also belongs to a polar net with any pencil of quadrics which is mapped in S_9 by a line belonging to the tetrahedral complex which contains l and has for its singular planes the joins in threes of the points in which the 4-secant solid through l meets V_3^8 . *J. A. Todd.*

Fano, G.: Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 813—818 (1936).

Concerning 3-dimensional varieties M_3^{2p-2} in an S_{p+1} whose sections with the $(p-1)$ -spaces are canonical curves (of genus p and of order $2p-2$) and whose genera all vanish, it was known that they exist for certain small values of p . It was also known that for $p=3, 4$ these varieties are not rational. In the present paper the following results are announced: the varieties M_3^{2p-2} exist only for $p \leq 37$; if $p < 10$, they are all rational, except in one doubtful case ($p=13$, in which case there is the M_3^{24} in S_{14} , birationally equivalent to the general cubic variety V_3 in S_4 and image of the sections of V_3 by the hyperquadrics). The maximum value $p=37$ gives rise to two birationally distinct types, fully described. — There follows an outline of a classification of surfaces F^{2p-2} in S_p with canonical sections. *O. Zariski.*

Wong, B. C.: Certain rational r -dimensional varieties of order N in hyperspace with a rational pencil of $(r-1)$ -dimensional varieties of lower order. Amer. J. Math. 58, 874—880 (1936).

Die Abbildung auf einem Raume S_r der hier betrachteten rationalen Mannigfaltigkeiten Φ_r wird von dem Linearsystem aller V_{r-1}^n geliefert, die die Schnitt- M_{r-k} von k allgemeinen Hyperflächen m -ter Ordnung enthalten. Verf. studiert zunächst im allgemeinen die Ordnung von Φ_r und die Örter von Φ_r , die den Unterräumen von S_r entsprechen. Dann wendet er sich insbesondere dem Falle $k=2, n=m+1 \geq 3$ zu, und diskutiert die verschiedenen Projektionen der betreffenden Φ_r ; der im Titel genannte Büschel hat als Bild im S_r die Hyperflächen n -ter Ordnung des Büschels, die die gegebene M_{r-2} enthalten. *E. G. Togliatti (Genova).*

Differentialgeometrie:

Hadamard, J.: La caustique des enveloppes à deux paramètres. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 333—337 (1936).

Es wird gezeigt, daß die Gleichung $F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 = 0$ im allgemeinen eine Rückkehrkante auf der Einhüllenden der zweiparametrischen Flächenschar $F(x, y, z; u, v) = 0$ liefert; Vergleich der Rechnungen mit dem Falle von Kurvenscharen auf einer Fläche.

W. Feller (Stockholm).

Cohn-Vossen †, Stefan: Existenz kürzester Wege. Compositio Math. 3, 441—452 (1936).

The author has devised an essentially new method of proof under less restrictive assumptions of the following theorem due to Hopf and Rinow [Comment. math. helv. 3 (1931); this Zbl. 2, 350]: Any pair of points a, b , of a two-dimensional Riemannian space R can be joined by a curve of shortest length (necessarily a geodesic line), or there exists a ray L (Strahl) going out from either point toward the other. The ray L possesses, among others, the following properties: (1) L is homeomorphic with the open interval $0 \leq t < 1$; (2) L is a closed point set in R ; (3) L contains all curves of shortest length joining any pair of its points; (4) the length of L is finite, i.e. not greater than (ab) , in which (ab) is the distance function of R . — The author, in contrast with Hopf and Rinow, has succeeded in proving this theorem without assuming that the distance function is symmetric. Hopf and Rinow assume that each point p of R possesses a neighborhood such that a uniquely determined curve of shortest length exists joining p with any point in this neighborhood. The author is able to prove the theorem without assuming the uniqueness of the shortest curves in the small. With the additional assumption that the space R is compact in the small, Hopf and Rinow have shown that every infinite bounded point set in R is compact

provided that no ray L of bounded length exists. The author obtains this result also. — The author includes in this paper an interesting discussion of the independence of the various axioms used for the space R and the relationships between them. *Stoker.*

Busemann, Herbert, und Willy Feller: Bemerkungen zur Differentialgeometrie der konvexen Flächen. III. Über die Gauss'sche Krümmung. Mat. Tidsskr. B 1936, 41—70.

Es sei Ω eine beliebige Menge auf einer konvexen Fläche Φ . Unter dem sphärischen Bild Ω^* von Ω wird die Vereinigungsmenge aller der Punkte der Einheitskugel verstanden, in denen die Tangentialebene einer durch einen Punkt von Φ gehenden Stützebene parallel ist. In fast allen Punkten von Φ existiert eine Tangentialebene und nach früheren Ergebnissen der Verff. (vgl. dies. Zbl. 12, 274; 13, 179) eine Dupin'sche Indikatrix i . Es sei P ein solcher Punkt; Ω durchlaufe eine Folge meßbarer Mengen von Φ , die sich auf P zusammenziehen. Es wird untersucht, inwiefern in P eine Gauß'sche Krümmung in dem Sinne existiert, daß der Quotient $|\Omega^*|/|\Omega|$ der Maße von Ω^* und Ω einem nur von der Indikatrix i abhängigen Grenzwert zustrebt. Es sei Ω_h die P enthaltende Kappe, die von der zur Tangentialebene in P parallelen Ebene im Abstand h abgeschnitten wird. Es wird vollständig geklärt, wie sich $|\Omega_h^*|/|\Omega_h|$ bei $h \rightarrow 0$ verhält. Hierbei werden die Quotienten $|\Omega_h|/h$ und $|\Omega_h^*|/h$ gesondert behandelt. Der erste strebt bei $h \rightarrow 0$ stets gegen den doppelten Flächeninhalt der Indikatrix i (∞ ist zuzulassen). Wenn i beschränkt ist und nicht durch P geht, ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\Omega_h^*|}{h} = \int_0^{2\pi} \frac{g^2(\varphi) - g'^2(\varphi)}{g^4(\varphi)} d\varphi,$$

wo $r = g(\varphi)$ die Gleichung von i in Polarkoordinaten ist. Wenn i beschränkt ist und durch P geht, gilt $|\Omega_h^*|/h \rightarrow \infty$. Wenn i unbeschränkt ist, existiert der Grenzwert im allgemeinen nicht. In den beiden ersten Fällen existiert also eine Gauß'sche Krümmung $K(P)$. Ist i speziell eine Ellipse mit P als Mittelpunkt, so ergibt sich der übliche Ausdruck für K . Bei unbeschränkter Indikatrix, die nicht durch P geht, ist folgendes für die Existenz von K hinreichend. Es sei γ_h die kleinste geodätische Kreisscheibe, die Ω_h enthält. Ist dann $\lim_{h \rightarrow 0} |\gamma_h|/|\Omega_h|$ endlich, so gilt $K = \lim_{h \rightarrow 0} |\Omega_h^*|/|\Omega_h| = 0$.

Geht i durch P und ist unbeschränkt, so ist auch dies nicht hinreichend (Beispiel). — Es sei jetzt γ_h die geodätische Kreisscheibe vom Radius h um P . Aus einem Satz der Lebesgueschen Theorie folgt, daß fast überall $\lim_{h \rightarrow 0} |\gamma_h^*|/|\gamma_h| = \lambda(P)$ existiert.

Es wird gezeigt: Gilt in P der Eulersche Satz, was nach früheren Ergebnissen der Verff. (vgl. die obigen Zitate) fast überall der Fall ist, so ist $1/\lambda(P)$ gleich dem Produkt der Hauptkrümmungsradien. Wenn die sphärische Abbildung totalstetig ist, wozu die Existenz der Tangentialebene in jedem Punkt nicht hinreicht, so ist die Totalkrümmung eines Flächenstückes gleich dem Lebesgueschen Integral des Produktes der Hauptkrümmungen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Perepelkine, Dimitri: Sur la relation entre les trois formes quadratiques d'une surface. Bull. Sci. math., II. s. 60, 293—296 (1936).

Aus der O. Rodriguesschen Formel folgt, daß für jede Verschiebung auf einer Fläche die beiden Vektoren $\vec{dr} + R_i \vec{dn}$ in die Richtungen der Krümmungslinien fallen; hierbei bezeichnen \vec{r} den Radiusvektor, R_i die Hauptkrümmungsradien, \vec{n} den Einheitsvektor in der Normalenrichtung. Hieraus folgt nun $(\vec{dr} + R_1 \vec{dn})(\vec{dr} + R_2 \vec{dn}) = 0$, und das ist die bekannte im Titel erwähnte Relation. *W. Feller (Stockholm).*

Scheffers, Georg: Verallgemeinerung der Schiebungsflächen. S.-B. Berlin. math. Ges. 35, 35—43 (1936).

Die verschiedenen bekannten Definitionen der Translationsflächen führen durch Verallgemeinerung zu Flächen mit konjugierten Kegelberührungskurven. Deren neue

Erzeugung ist die folgende: Auf zwei Raumkurven sind gewisse Skalen gegeben, und man hat die Sehnen zwischen beiden Kurven im Verhältnis der Skalenwerte der Endpunkte zu teilen. Dann werden die hierzu dualen Flächen mit ebenen konjugierten Kurven und solche mit beiden Eigenschaften — besonders Flächen 2. Grades — betrachtet.

Eckhart (Wien).

Buchguennee, Serge: Sur les surfaces de Bianchi. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 762—764 (1936).

En poursuivant l'étude des surfaces de Bianchi l'auteur rectifie sa Note antérieure (ce Zbl. 14, 179). On connaît à priori 3 systèmes conjugués sur chaque surface B_3 dont deux premiers (cités l. c.) sont toujours distincts et le troisième contenant les lignes $K = \text{const}$ se confond avec le premier ou le second seulement si les lignes $K = \text{const}$ sont géodésiques sur B_3 ou sur la sphère représentative. Il en dérive une énoncée restrictive du théorème concernant la déformation de B_3 : les conditions citées l. c. ne sont pas suffisantes et caractérisent la déformation à réseau conjugué persistant d'une surface qui s'applique sur B_3 .

S. Finikoff (Moscou).

Bonefi, N.: Sur le théorème de Legendre relatif aux triangles géodésiques et leur compensation. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 32, 145—149 (1936) [Bulgarisch].

Nous nous proposons de donner un théorème qui réunit le théorème de Legendre, concernant la réduction de la résolution d'un triangle géodésique à celle d'un triangle rectiligne, au théorème relatif à la compensation d'un triangle rectiligne dont les angles sont mesurés avec des poids différents p, q, r .

Autoreferat.

Tzénoff, Iv.: Sur les surfaces réglées et leur application à la théorie des surfaces. I. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 32, 227—278 (1936) [Bulgarisch].

Nous nous proposons d'obtenir les propriétés des surfaces réglées en appliquant les méthodes de l'analyse vectorielle. Pour démontrer certains résultats on emploie d'habitude des systèmes de coordonnées spéciaux; nous nous sommes servi des systèmes les plus généraux.

Autoreferat.

Kanitani, Jôyô: Significations géométriques des invariants fondamentaux d'une courbe. Mem. Ryojun Coll. Engrg 9, 77—88 (1936).

Der Verf. hat schon früher (vgl. dies. Zbl. 14, 278) die Begriffe „Elemente des Projektivbogens“ und „Krümmungselement“ einer Kurve Γ eingeführt und behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Begriffe in bezug auf ihre geometrischen Eigenschaften untersucht, und zwar bedient sich der Autor des — in der projektiven Differentialgeometrie üblichen — Projektionsverfahrens. Hier sollen nur zwei Beispiele dieser Behandlung angegeben werden: 1. Die Elemente des Projektivbogens von Γ bis zur Ordnung $n+1-s$ in bezug auf das Bezugssystem $xx_1 \dots x_n$ in x sind den entsprechenden Elementen von $\Gamma_{(s)}$ in bezug auf das Bezugssystem $\frac{x_s}{s!}, \dots, \frac{i!x_{s+i}}{(s+i)!}, \dots, \frac{(n-s)!x_n}{n!}$ in x_s gleich. Dabei entsteht $\Gamma_{(s)}$ durch Projektion von Γ von $xx_1 \dots x_{s-1}$ aus auf $x_s x_{s+1} \dots x_n$. 2. Das Krümmungselement hat folgende Eigenschaft: Bezeichnet man mit Γ^* die Projektion der Γ von $xx_1 \dots x_{n-3}$ aus auf $x_{n-2} x_{n-1} x_n$ ($n > 2$), so ist das Krümmungselement von Γ in x dem Krümmungselement von Γ^* in x_{n-2} gleich.

Hlavatý (Praha).

Marletta, G.: Una proprietà del 2° spigolo di Green. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 6—10 (1936).

Soit P un point non parabolique d'une surface S de l'espace ordinaire. L'A. démontre que le voisinage du 3^{me} ordre (mais il dit erronément du 4^{me} ordre) de P sur la courbe L intersection de S avec le plan π tangent en P à S ne détermine aucun point, projectivement invariant, distinct de P ; tandis que ledit voisinage suffit pour déterminer le 2^{me} arête de Green, mais aucune droite invariante ultérieure (distincte des deux tangentes asymptotiques). Ce resultat, qui se rattache à d'autres donnés par B. Segre [C. R. Acad. Sci., Paris 184 (1927)], V. Strazzeri [Rend. Circ. mat. Palermo 54 (1930)] et G. Palozzi [Atti Accad. naz. Lincei, Rend.,

VI. s. 15; ce Zbl. 4, 368), est obtenu moyennant l'étude de l'involution du 3^{me} ordre définie sur π par les deux faisceaux de coniques ayant des contacts quadripunctuels en P avec les deux branches de L qui sortent de ce point; il est à rapprocher à G. Fubini-E. Čech, „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces“ (Paris: Gauthier-Villars 1931), p. 98.

Beniamino Segre (Bologna).

Gambier, Bertrand: Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 700—702 (1936).

Les surfaces dont les asymptotiques des deux systèmes appartiennent à des complexes linéaires ont été étudiées il y a longtemps (cfr. l'Appendice de A. Terracini au Traité de G. Fubini-E. Čech, *Geometria proiettiva differenziale* II, 777. Bologna: Zanichelli 1927). Ces surfaces dépendent de deux fonctions arbitraires d'un seul argument, et peuvent être toutes représentées sous forme finie; elles ont été classées dans trois espèces, une desquelles comprend les surfaces transformées d'une quadrique non dégénérée par congruences W . — Ici l'A. obtient, sous forme finie, les deux systèmes ∞^1 de surfaces les plus généraux contenant chacun une même quadrique non dégénérée et satisfaisant au théorème classique de permutableté de Bianchi; chaque système est, par conséquent, complètement constitué par des surfaces de l'espèce envisagée plus haut. *Beniamino Segre* (Bologna).

Palozzi, G.: Sulla geometria proiettivo-differenziale di nuovi reticolati dello spazio ordinario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 53—59 (1936).

L'A. considère dans un espace projectif ordinaire un réticule, à savoir la figure formée par trois systèmes ∞^1 de surfaces, tels que par chaque point P (d'une certaine région) de l'espace on ait trois surfaces — une pour chacun des trois systèmes — avec les plans tangents en P indépendants. Il attache au réticule trois formes différentielles du 1^{er} ordre [dont une avait été déjà considérée par lui, sous le nom d'élément linéaire projectif du réticule, dans Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. (1930)], formes qui, à leur tour, définissent le réticule à moins d'une collinéation, et qui résultent indéterminées seulement dans des cas bien spécifiés; les coefficients de ces formes sont liés par des conditions différentielles, nécessaires et suffisantes pour l'existence du réticule correspondant.

Beniamino Segre (Bologna).

Anderson, Nola L., and Louis Ingold: Normals to a space V_n in hyperspace. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 429—435 (1936).

The authors consider a Riemannian manifold of n dimensions imbedded in hyperspace and study fields of n linearly independent contravariant and covariant vectors. The first curvature vectors belonging to these fields have components normal to the manifold, and the relations between these components are studied. The investigation is carried out in the notation of Maschke-Ingold. Reference to the existing literature in other notation is given for the case $n = 2$, where the relation to results of Wilson and Moore [Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 52 (1916)] is established.

Struik.

Thomas, T. Y.: Fields of parallel vectors in the large. Compositio Math. 3, 453 bis 468 (1936).

Given an affinely connected space S , that is an n -dimensional manifold with a general affine connection $L_{\beta\gamma}^\alpha$, which is taken as an analytical function of the coordinates x^1, \dots, x^n . The space S will then admit K (or more), $1 \leq K \leq n$, independent fields of parallel contravariant vectors with components $\xi_{(i)}^\alpha(x), \dots, \xi_{(K)}^\alpha(x)$, which are analytical functions of the coordinates of S if, and only if, a certain polynomial $R_K(B)$ vanishes over S . This polynomial $R_K(B)$ is defined as the sum of the squares of all determinants of order $n + 1 - K$, which can be formed from the matrices of the system $(E_0), (E_1), \dots, (E_n)$:

$$(E_0) \quad \sum \xi^\mu B_{\mu\beta\gamma}^\alpha = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

$$(E_i) \quad \sum \xi^\mu B_{\mu\beta\gamma, \delta_1, \dots, \delta_i}^\alpha = 0 \quad \mu = 1, \dots, n$$

where $B_{\mu\beta\gamma, \delta_1, \dots, \delta_i}^\alpha$ is the i -th covariant derivative of the curvature tensor $B_{\mu\beta\gamma}^\alpha$ of S . —

The result is generalized to n -dimensional topological manifolds \mathfrak{M} of class A (according to Veblen-Whitehead) with a general affine analytical connection $L_{\beta\gamma}^\alpha$. In particular, if $K = n$, we find that the necessary and sufficient condition for the existence of n independent fields of parallel vectors is the vanishing of the curvature tensor. In this case the space \mathfrak{M} becomes an affine space of distance parallelism. *Struik*.

Cairns, Stewart S.: The generalized theorem of Stokes. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 167—174 (1936).

The generalized theorem of Stokes is an identity between an integral over a manifold M_r of r dimensions and an integral over its boundary B_{r-1} , imbedded in a euclidean n -space R_n . This paper contains a proof for the case, where R_n is a manifold of class one (Veblen-Whitehead, Foundations of Differential Geometry 1932, Chapter 6), and M_r and B_{r-1} are made up of a certain type of continuously differentiable manifolds. *Struik* (Cambridge).

Griss, G. F. C.: Die konformen Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 947—955 (1936).

Mittels der bekannten Zerlegung der Cayleyschen Kovariante 6. Ordnung einer biquadratischen binären Form in drei quadratische Formen werden die konformen Differentialinvarianten eines binären biquadratischen Tensors auf konforme Differentialinvarianten von zwei kovarianten quadratischen Tensoren zurückgeführt. Für diese gilt ein Reduktionssatz, nach dem alle konformen Differentialinvarianten gewöhnlich affine Invarianten der beiden gegebenen Tensoren $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, eines alternierenden Tensors $\Gamma_{\mu\nu}$ und eines Krümmungstensors, sowie ihrer kovarianten Ableitungen sind. Es wird eine kleinste algebraische Basis von Differentialinvarianten 1. Ordnung angegeben. In ähnlicher Weise werden Reduktionssätze für die konformen Differentialinvarianten von n kovarianten n -ären Vektoren aufgestellt. *van der Waerden*.

Craig, H. V.: On a generalized tangent vector. II. Amer. J. Math. **58**, 833—846 (1936).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. **11**, 176) führt der Verf. hier ein neues Operationssymbol ${}^v O_e$ ein

$${}^v O_e F = \sum_{u=v}^m (-1)^u \binom{u}{v} \frac{d^{u-v}}{dt^{u-v}} \frac{\partial F}{\partial p^e}; \quad \left(p = \frac{dx}{dt} \right) \quad (1)$$

und untersucht in erster Reihe die Invarianz von ${}^v O_e F(m)$, (wo (m) auf die Zahl rechts in (1) hinweist). Als Beispiel soll folgender Satz erwähnt werden: Wenn $\int F(m) dt$ in bezug auf Parametertransformation invariant ist, so ist

$$\left(\frac{d}{dt} x^e \right) {}^c O_e F = -\delta_1^c F, \quad (c = 0, 1, \dots, m).$$

Außerdem konstruiert der Verf. einen Fundamentaltensor $f_{e\sigma}$

$$f_{e\sigma} = F^{2m-1} \frac{\partial^2 F}{\partial p^e \partial p^\sigma} + T_e T_\sigma, \quad (T_e = -{}^1 O_e F), \quad (2)$$

der ihn zu den Übertragungskoeffizienten $\left\{ \begin{smallmatrix} \tau \\ e \end{smallmatrix} \right\}$ führt:

$${}^* \left\{ \begin{smallmatrix} \tau \\ e \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \tau \\ e \end{smallmatrix} \right\} + f^{\sigma\tau} T_\sigma S_e - T_e S^\tau. \quad (3a)$$

Dabei ist

$$S_e = \frac{\partial F}{\partial x^e} + \sum_{u=2}^m (u-1) (-1)^{u-1} \frac{d^u}{dt^u} \frac{\partial F}{\partial p^e} - T_e \left\{ \begin{smallmatrix} \tau \\ e \end{smallmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} \omega \\ e \end{smallmatrix} \right\} = f^{\tau\omega} \left\{ \begin{smallmatrix} \tau \\ e \end{smallmatrix} \right\}$$

und

$$2 \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ e \end{smallmatrix} \right\} = \frac{d}{dt} f_{e\sigma} - \left[\frac{F^{2m-1}}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial p^{[e} \partial p^{\sigma]}} + T_{[e} \frac{d}{dt} T_{\sigma]} \right]. \quad (3b)$$

(Es ist zu bemerken, daß diese Koeffizienten mittels des [verallgemeinerten] Christoffelschen Verfahrens konstruiert werden.) Bezeichnet man mit $*\Theta$ den zu (3a) gehörigen Operator kern der kovarianten Differentiation, so lassen sich die Eigenschaften der Übertragung (3a) folgendermaßen formulieren: a) $*\Theta f_{e\sigma} = 0$, b) $*\Theta T_e = E_e$ (E ist der Eulersche Vektor), c) $*\Theta V^e W^{\sigma} f_{e\sigma} = 0$ für $*\Theta V^e = 0$, $*\Theta W^e = 0$, d) die Autoparallelen in bezug auf $*\Theta$ sind die Extremalen des auf F basierten Variationsproblems. (Der Deutlichkeit des Referates wegen haben wir uns nicht der Symbolik des Verf. bedient. — Verwandte Fragen finden sich auch bei Synge, dies. Zbl. 12, 88. Vgl. auch Kawaguchi, dies. Zbl. 2, 158; 6, 32; 8, 33.) Hlavatý (Praha).

Topologie :

Nielsen, Jakob: Topologie des transformations des surfaces. Enseignement Math. 35, 269—287 (1936).

Zusammenfassender Bericht über die Untersuchungen des Verf. zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta math. 50, 53, 58. — Die Untersuchungen ordnen sich dem Problem unter, die Klassen ineinander deformierbarer Selbstabbildungen einer Fläche φ aufzuzählen und durch Invarianten zu charakterisieren. Die Fläche φ wird als geschlossen, orientierbar, vom Geschlecht $p > 1$, die Selbstabbildung $\tau\varphi$ von φ als topologisch und indikatrixerhaltend vorausgesetzt. φ läßt sich also mit einer Metrik der konstanten Krümmung -1 ausstatten, so daß die universelle Überlagerungsfläche die hyperbolische Ebene wird, die durch ihr Poincaré'sches Modell (inneres Φ des Einheitskreises E) dargestellt wird. Die Decktransformationen $1, f_1, f_2, \dots$ von Φ sind nichteuklidische Bewegungen (vom hyperbolischen Typus). Sie bilden die Fundamentalgruppe F von φ . Die Abbildung $\tau\varphi$ bewirkt einen Automorphismus von F , der aber nur bis auf innere Automorphismen bestimmt ist, d. h. der Abbildung $\tau\varphi$ kommt eine bestimmte Automorphismenfamilie von F zu. Nun gilt der Satz: Die Abbildungsklassen von φ und die Automorphismenfamilien von F entsprechen einander umkehrbar eindeutig. Das topologische Problem, alle Abbildungsklassen aufzuzählen, ist also dem gruppentheoretischen, alle Automorphismenfamilien von F anzugeben, gleichwertig. — Der Abbildung $\tau\varphi$ von φ entsprechen unendlich viele topologische Abbildungen $t\Phi, f_1 t\Phi, f_2 t\Phi, \dots$ von Φ in sich. Jede dieser Abbildungen läßt sich zu einer topologischen Selbstabbildung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\Phi + E$ erweitern. Es zeigt sich, daß die topologischen Selbstabbildungen $tE, f_1 tE, f_2 tE, \dots$ der Kreisperipherie Invarianten der Abbildungsklasse von τ sind. Durch Betrachtung dieser Randabbildungen gelingt es nun, die den topologischen Abbildungen τ von φ entsprechenden Abbildungen t von Φ in endlich viele Typen einzuteilen, die durch zwei hier nicht näher zu definierende Zahlen μ und ν charakterisiert sind. — Auch das Fixpunktproblem ordnet sich dem genannten Hauptproblem unter. Man gelangt zu unteren Grenzen für die Anzahlen von Fixpunkten, die die Abbildungen $\tau\varphi$ einer Abbildungsklasse besitzen, durch den Begriff der Fixpunkt-klassen. Diejenigen Fixpunkte von $\tau\varphi$, die den Fixpunkten einer Abbildung $f_i t\Phi$ entsprechen, werden in eine Fixpunkt-klasse zusammengefaßt. $\tau\varphi$ hat nur endlich viele Fixpunkt-klassen. Jeder Fixpunkt-klasse läßt sich ein Index j zuordnen, der mit den Zahlen μ und ν durch die Formel zusammenhängt: $j = 1 - \nu - \mu$. Ist $j \neq 0$, so heißt die Fixpunkt-klasse wesentlich. Sind j_1, j_2, \dots, j_Z die Indizes aller wesentlichen Fixpunkt-klassen von φ , so ist die Summe $j_1 + j_2 + \dots + j_Z = \mathcal{E}$ durch die Alexander'sche Formel bestimmt. Daraus ergeben sich untere Grenzen für die Anzahl Z der wesentlichen Klassen und damit zugleich für die Mindestzahl der Fixpunkte von $\tau\varphi$: Es ist stets $Z \geq \mathcal{E}$, ferner $Z \geq -\mathcal{E} - 4(p-1)$ für $\mathcal{E} < -4(p-1)$; für $-4(p-1) \leq \mathcal{E} \leq -1$ ergibt sich nur $Z \geq 1$. Zum Schluß werden die Iterationen einer Abbildung τ untersucht. Ist n der kleinste positive Exponent, für den τ^n zur Klasse der Identität gehört, so ist nicht bekannt, ob es in der Klasse von τ eine Abbildung σ gibt, für die σ^n die Identität ist. Wir beschränken uns darauf, von den

weiteren Ergebnissen den folgenden Satz anzuführen: Ist n eine Primzahl, so ist $n \leq 2p + 1$, und für die Anzahl der wesentlichen Fixpunktklassen gilt $Z \leq 2 + \frac{2p}{n-1}$ und $Z \equiv 2 - 2p \pmod{n}$; für $n = 2$ sogar $Z \equiv 2 - 2p \pmod{4}$. *H. Seifert.*

Lefschetz, Solomon: Sur les transformations des complexes en sphères. Fundam. Math. 27, 94—115 (1936).

Nachdem Bruschlinsky und Freudenthal die erste bzw. die n -te Bettische Gruppe eines n -dimensionalen Polyeders und sogar eines beliebigen n -dimensionalen Kompaktums durch Gruppen von Klassen stetiger Abbildungen in die S^1 bzw. die S^n ausgedrückt haben, löst jetzt der Verf. das analoge Problem für Bettische Gruppen beliebiger Dimension eines Polyeders. Die Methode beruht einerseits auf der Betrachtung von sog. Pseudozyklen (s. unten), andererseits aber auf der Heranziehung einer gewissen Klasse von mehrdeutigen Abbildungen und auf deren Behandlung mittels der Produktbildung — eines Verfahrens, welches seit Verf.s klassischen Arbeiten über das Fixpunktproblem bekannt ist. Die Pseudozyklen, die — für den Fall des rationalen Koeffizientenbereiches — Verf. bereits 1930 in seinem Buch Topology (S. 284, 341, 358) behandelt hatte, treten jetzt für den Fall des ganzzahligen Koeffizientenbereiches auf. Die Gruppe G^p der p -dimensionalen Pseudozyklen eines Polyeders \bar{K}^n ist im Pontrjaginschen Sinne dual zu der p -dimensionalen Bettischen Gruppe modulo 1 von \bar{K} . Zuerst wird der Hopfsche Satz bewiesen: Die Gruppe der n -dimensionalen Pseudozyklen eines n -dimensionalen Polyeders P^n ist isomorph mit der Gruppe der Klassen der stetigen eindeutigen Abbildungen von P^n in die S^n . Ferner wird zu der Betrachtung mehrdeutiger Abbildungen übergegangen. Dabei wird eine mehrdeutige Abbildung normal genannt, wenn ihr Abbild $\{x, f(x)\}$ im Produktraum ein singulärer Komplex ist (das ist also eine Verallgemeinerung im Vergleich mit den Abbildungen, die in den fixpunkttheoretischen Untersuchungen von Lefschetz zugelassen werden: dort wird verlangt, daß das Bild ein Zyklus ist). Zwei Abbildungen werden als gleich erklärt, wenn sie sich in einem naheliegenden Sinne nur durch eine unwesentliche Abbildung unterscheiden. Die Klassen der untereinander gleichen Abbildungen bilden eine Gruppe, und diese ist wiederum der Gruppe der n -dimensionalen Pseudozyklen isomorph. Die Isomorphie wird dabei mittels des folgenden Satzes hergestellt: Jede normale Abbildung ist einer eindeutigen Abbildung gleich. Die normalen mehrdeutigen Abbildungen erhalten eine wesentliche Bedeutung, sobald zu den r -dimensionalen Bettischen Gruppen eines p -dimensionalen Polyeders übergegangen wird. Es werden nämlich die normalen mehrdeutigen Abbildungen eines p -dimensionalen Polyeders K^p in die S^n , $n < p$, untersucht, wobei jetzt die Normalitätsbedingung dahin verstärkt wird, als verlangt wird: Jede Sphäre im Abbild $\{x, f(x)\}$ der gegebenen Abbildung, deren Projektion in \bar{K}^p dortselbst homotop Null ist, muß es auch im Produktraum $\bar{K}^p \times S^n$ sein. Die normalen Abbildungen werden wiederum in Klassen eingeteilt, diese bilden eine Gruppe, welche der Gruppe der n -dimensionalen Pseudozyklen von \bar{K}^p isomorph ist. Die Arbeit schließt mit Verallgemeinerungen der obigen Theorie, betreffend vornehmlich ihre Relativierung (im üblichen Lefschetzschen Sinne) bzw. Lokalisierung, woraus sich insbesondere auch dimensionstheoretische Folgerungen ergeben.

P. Alexandroff (Moskau).

Alexander, J. W.: On the connectivity ring of an abstract space. Ann. of Math., II. s. 37, 698—708 (1936).

Ein symbolischer Komplex ist eine Menge K von Simplexen von der Eigenschaft, daß jede Seite eines Simplexes von K wiederum ein Simplex von K ist (es kann also — zum Unterschied von den gewöhnlichen Komplexen — ein Eckpunkt zu unendlich-vielen Simplexen gehören). Es sei K ein symbolischer Komplex, R ein nicht notwendig kommutativer Ring. Eine schieb-symmetrische Funktion $f^m = (x_0, x_1, \dots, x_m)$, definiert für alle m -dimensionalen Simplexe $(x_0 x_1 \dots x_m)$ von K , dürfte als alge-

braischer Komplex bezeichnet werden. Die gewöhnliche Randbildung versagt jedoch in unserem Falle. Aber die zur Randbildung duale Operation

$$g_0 f^m = f^{m+1}(x_0 x_1 \dots x_{m+1}) = \sum_0^{m+1} (-1)^j f^m(x_0 \dots x_{j-1} x_{j+1} \dots x_{m+1})$$

gilt für symbolische Komplexe ebenso wie für gewöhnliche. Verf. nennt $g_0 f^m$ die Ableitung der Funktion f^m (die Operation ist in der Tat der äußeren Ableitung der schief-symmetrischen Differentialformen, wie sie zuerst Poincaré definiert hat, analog). Die Zyklen, d. h. die Funktionen f^m mit $g_0 f^m = 0$, nennt Verf. **exakte Funktionen** (ein äquivalenter Begriff befindet sich übrigens bei Lefschetz, *Topology*, 1930, 282—286). Der Operator g_0 ist distributiv in bezug auf die Addition und involutorisch (d. h. $g_0 g_0 f^m = 0$), in folgedessen liegt in der Gruppe der exakten Funktionen die Untergruppe der „Ableitungen“. — Als Faktorgruppe erhält man die (duale) Bettische Gruppe G^m des symbolischen Komplexes K . Für abstrakte Zellenkomplexe [de Rham, *Sur l'Analysis Situs des variétés à n dimensions*, Pariser Diss. 1931, abgedr. in *J. de Math.* (9) **10**; Tucker, *Ann. of Math.* **34**, 191—243 (1933); dies. Zbl. **2**, 55 u. **6**, 423] führt die „duale Homologietheorie“ insofern zu nichts Neuem, als sie mit der üblichen Homologietheorie des dualen Zellenraumes übereinstimmt. [Vgl. wegen einer zusammenfassenden Darstellung von diesem Standpunkt aus: Kolmogoroff, *Rec. math. Soc. math. Moscou* **1**, 97—102 (1936); dies. Zbl. **14**, 38]. Nun spielen aber in der gegenwärtigen Arbeit die symbolischen Komplexe, in denen keine gewöhnliche Randbildung möglich ist, durchaus eine wesentliche Rolle. Der Inhalt der Arbeit besteht vornehmlich in der Definition einer Multiplikation zweier Homologieklassen Φ^p und Φ^q , und zwar wird $[\Phi^p \cdot \Phi^q] = \Phi^{p+q}$ definiert. Man kommt so zum Homologieren eines beliebigen symbolischen Komplexes (und dann auch zum Homologieren allgemeiner Räume, s. unten). Um den Zusammenhang mit klassischen Begriffen klarzumachen, sei daran erinnert, daß im Homologieren der orientierbaren Mannigfaltigkeiten M^n (mit der Schnittbildung als Multiplikation) das Produkt einer $(n-p)$ - und einer $(n-q)$ -dimensionalen Homologiekasse eine $(n-p-q)$ -dimensionale Homologiekasse ist. Da der Zellenraum, der zu einer Zellenzerlegung der M^n dual ist, wiederum eine Zellenzerlegung dieser M^n ist, entsteht eine zur Schnittmultiplikation duale Multiplikation $\Phi^p \cdot \Phi^q = \Phi^{p+q}$. Diese Multiplikation läßt sich auf beliebige symbolische Komplexe und sodann auf abstrakte Räume übertragen. Eine duale Homologietheorie wurde — einschließlich der Homologie-Ring-Konstruktion — unabhängig voneinander vom Verf. und vom Ref. aufgebaut; vgl. die Noten des Verf. in *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **21**, 509 und 512 (1935); dies. Zbl. **12**, 230, 231, sowie die Vorträge des Verf. und des Ref. auf der Internationalen Tensor-Konferenz, Moskau 1934, und Topologie-Konferenz, Moskau 1935. Eine Übertragung dieser Theorie ins Mengentheoretische (im Kleinen bikompakte Räume) befindet sich (jedoch ohne eine explizite Multiplikationsdefinition) in den Noten des Ref. in *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1144, 1325, 1558, 1641 (1936); dies. Zbl. **13**, 422, 423 u. **14**, 38, 39). Die vom Verf. und Ref. eingeführte Produktdefinition hatte jedoch den Nachteil, daß sie im Falle der M^n einen störenden numerischen Faktor lieferte, welcher insbesondere im Falle modulo 2 z. B. identisch $\Phi^1 \Psi^1 = 0$ machte. Die neue Definition (die — s. das nachstehende Ref. — in verschiedenen Formen von Alexander, Čech und Whitney herrührt) ist von diesem Mangel frei. Anschließend an Whitney und Čech setzt Verf. voraus, daß die Eckpunkte des gegebenen symbolischen Komplexes K in einer festen Wohlordnung vorliegen: $x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots$. Sodann wird das Produkt $[f^m \cdot f^n]$ zweier Funktionen definiert als

$$[f^m \cdot f^n] = f^{m+n}(x_{\alpha_0} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_{m+n}}) = f^m(x_{\alpha_0} \dots x_{\alpha_m}) f^n(x_{\alpha_{m+1}} \dots x_{\alpha_{m+n}}), \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{m+n}.$$

Die Definition hängt somit zunächst von der gewählten Wohlordnung der Eckpunktmenge ab. Es gilt jedoch folgendes. Erstens: Sind f^m und f^n Zyklen („exakte Funktionen“), so gilt dasselbe auch von $[f^m \cdot f^n]$; zweitens: Sind die Zyklen f_1^m und f_2^m unter-

einander homolog ebenso wie f_1^n und f_2^n , so sind auch die Zyklen $[f_1^m \cdot f_1^n]$ und $[f_2^m \cdot f_2^n]$ homolog. Man kann also von der Multiplikation der Homologieklassen (immer in bezug auf die gewählte Wohlordnung) sprechen. Und schließlich: Die letztere Multiplikation ist von der Wahl der Wohlordnung unabhängig. Bei dem Beweise dieser Behauptungen ist die folgende Formel wesentlich:

$$g_0[f^m \cdot f^n] = [g_0 f^m \cdot f^n] + (-1)^m [f^m \cdot g_0 f^n].$$

— Einen symbolischen Raum definiert Verf. als Menge S von symbolischen Komplexen von der folgenden Eigenschaft: Zu je zwei Komplexen K_1 und K_2 von S gibt es in S einen gemeinsamen Teilkomplex. Eine Funktion f^m in S zu definieren heißt, f^m für alle Simplexe aller $K \in S$ zu definieren. Sodann bedeutet $g_0 f^m = f^{m+1}$, daß diese Relation in mindestens einem $K \in S$ gilt. Diese Definition ermöglicht die Übertragung der obigen Theorie auf symbolische Räume. Dadurch wird aber auch der Fall topologischer Räume miteingegriffen: Ist X ein solcher Raum, so betrachtet man die Menge seiner sämtlichen (endlichen) offenen Überdeckungen. Einer jeden solchen Überdeckung entspricht ein symbolischer Komplex folgendermaßen: Man fasse alle Simplexe (endliche Punktsysteme) zusammen, von denen jedes in mindestens einem Element der betreffenden Überdeckung enthalten ist. Die Gesamtheit der so gewonnenen symbolischen Komplexe bildet offenbar einen symbolischen Raum, und um dessen Homologietheorie handelt es sich. Seine dualen Bettischen Gruppen haben für den gegebenen topologischen Raum X eine invariante Bedeutung; insbesondere stimmen sie — wenn X bikompakt ist — mit den Bettischen σ -Gruppen im Sinne des Ref. (vgl. seine oben zitierten Comptes-Rendus-Noten) überein. Im Falle einer orientierbaren M^n ist der hier definierte Homologiering dem gewöhnlichen Schnitt-homologiering isomorph (wobei bei dieser Isomorphie r - und $(n-r)$ -dimensionale Homologieklassen einander entsprechen). A. Kolmogoroff (Moskau).

Čech, Eduard: **Multiplications on a complex.** Ann. of Math., II. s. 37, 681—697 (1936).

Für die algebraischen Teilkomplexe f^n eines simplizialen Komplexes K wird die gewöhnliche Randbildung g_u und die duale Operation g_0 (s. vorst. Ref.) betrachtet. Die beiden Operationen führen in üblicher Weise zu den Begriffen des Zyklus, der Homologie und der Bettischen Gruppen, welche weiter durch ein u - (bzw. ein σ -) gekennzeichnet werden. Die u -Homologieklassen werden durch große lateinische, die σ -Homologieklassen durch große griechische Buchstaben bezeichnet. Verf. führt eine Multiplikation des Typus $[\Phi^p \cdot \Phi^q] = \Phi^{p+q}$ ein, welche mit der im vorst. Ref. besprochenen übereinstimmt; außerdem eine Multiplikation des Typus $\Phi^p \cdot F^{p+q} = F^q$. Zu letzterem Zwecke setzt Verf.:

$$f^p \cdot f^{p+q} = f^q(x_{\alpha_0} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_q}) = \sum f^p(x_{\alpha_q} \dots x_{\alpha_{q+p}}) f^{p+q}(x_{\alpha_0} \dots x_{\alpha_{q+p}}),$$

wobei — wie im vorst. Ref. — angenommen wird, daß die Eckpunkte von K in einer festen Ordnung vorliegen und in dieser Ordnung $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_q$ ist; die Summation rechts wird auf alle Simplexe $(x_{\alpha_0} \dots x_{\alpha_{q+p}})$ mit fixierten $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ und $\alpha_q < \alpha_{q+1} < \dots < \alpha_{q+p}$ erstreckt. Die Multiplikation der Homologieklassen $\Phi^p \cdot F^{p+q} = F^q$ wird in üblicher Weise erklärt. Diese Produktdefinition für Homologieklassen ist wiederum (vgl. vorst. Ref.) unabhängig von der gewählten Ordnung der Eckpunktmenge. Ist K eine Simplizialzerlegung einer orientierbaren M^n und C^n der ganzzahlige Zyklus („die orientierte M^n “), der das Basiselement der n -dimensionalen Bettischen Gruppe von M^n bildet, so ergibt (bei ganzzahligem Koeffizientenbereich) die Formel

$$F^{n-p} = \varphi(\Phi^p) = \Phi^p \cdot C^n$$

eine isomorphe Abbildung der p -dimensionalen Bettischen σ -Gruppe auf die $(n-p)$ -dimensionale Bettische u -Gruppe, während

$$F^{n-p} = \Phi^p \cdot C^n, F^{n-q} = \Phi^q \cdot C^n, \\ F^{n-p-q} = [\Phi^p \cdot \Phi^q] \cdot C^n = F^{n-p} \times F^{n-q}$$

den gewöhnlichen Schnitt $F^{n-p} \times F^{n-q}$ liefert. Ein großer Teil der Theorie wird vom Verf. für eine Triade von Gruppen A, B, C mit einer distributiven Multiplikation $a \cdot b = c$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, anstatt eines einzigen Koeffizientenringes entwickelt.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Mechanik.

● **Trefftz, E.: Graphostatik.** (Teubners math. Leitfäden. Bd. 42.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1936. 90 S. u. 99 Abb. RM. 6.40.

Das Bändchen enthält eine knappe Darstellung der graphischen Statik der Ebene, deren Umfang durch die folgenden Kapitelüberschriften gekennzeichnet ist: I. Einleitung (5 S.), II. Die Kräfte am starren Körper (28 S.), III. Fachwerke (19 S.), IV. Zeichnerische Ermittlung von Schwerpunkt und Trägheitsmomenten (15 S.), V. Balkenbiegelehre (23 S.).

Prager (Istanbul).

Nagabushanam, K.: An application of a theorem of Lie and Koenigs to the equations of motion. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 123—124 (1936).

The author uses the theorem of Lie and Koenigs in the form given by Whittaker, *Analytical Dynamics*, p. 275 (1927), to make the immediate deduction that in general the equations of an arbitrary congruence in a space of $m + 1$ dimensions may be expressed as m Hamiltonian equations when m is even, and as $m - 1$ Hamiltonian equations, together with one other equation, when m is odd. This fact yields an alternative proof of the possibility of reducing the order of a Hamiltonian system by means of the integral of energy (cf. Whittaker, op. cit. p. 313). *J. L. Synge.*

Duboshin, G.: On the stability of the circular motions in the resisting medium. Astron. J. Soviet Union 13, 455—483 u. engl. Zusammenfassung 483—486 (1936) [Russisch].

Verf. untersucht kreisförmige Bewegungen eines materiellen Punktes unter der Wirkung einer Newtonschen Anziehungskraft eines Zentralkörpers, der von einer gravitierenden, rotierenden und widerstandsfähigen Atmosphäre umgeben ist. Die Flächen gleicher Dichte, gleicher Winkelgeschwindigkeit und gleichen Potentials sind als ähnliche Rotationsflächen vorausgesetzt, die symmetrisch bez. einer zur Rotationsachse (z -Achse) senkrechten Ebene sind. Bezeichnet man mit $n = n(\varrho, z^2)$ ($z = \sqrt{x^2 + y^2}$) die Winkelgeschwindigkeit, mit $\mu = \mu(\varrho, z^2)$ die Dichte, mit $u = u(\varrho, z^2)$ das Potential, und führt die Widerstandskraft in der Form $F = \lambda V \Phi(\mu, V^2)$ ($\lambda = \text{konst.}$) ein, wo V die relative Geschwindigkeit bedeutet, $V^2 = \left(\frac{dx}{dt} + ny\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - nx\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, so erhält man die Bewegungsgleichungen in der Form:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{x}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \lambda \Phi(\mu, V^2) \left[\frac{dx}{dt} + ny \right], \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{y}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \lambda \Phi(\mu, V^2) \left[\frac{dy}{dt} - nx \right], \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= 2z \frac{\partial u}{\partial z^2} - \lambda \Phi(\mu, V^2) \frac{dz}{dt},\end{aligned}$$

man sieht leicht, daß $x = a \cos(n_0 t + \omega_0)$, $y = a \sin(n_0 t + \omega_0)$, $z = 0$ eine Lösung dieses Systems ist, wo $n_0 = n(a, 0)$ und a durch die Gleichung $an^2(a, 0) + u'_a(a, 0) = 0$ bestimmt ist. Verf. untersucht Stabilitätseigenschaften im Sinne von Liapunoff solcher Lösungen.

A. Andronoff u. A. Witt (Moskau).

Takahasi, Kôitirô: On the theory of turbulence. Geophys. Mag. 10, 1—12 (1936).

From the analogy of the Brownian motion the equation of turbulent motion of perfect fluid is taken in the form $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\varrho} VP + F - \mu q + f$, where q = velocity, t = time, P = pressure, ϱ = density, F = external force, f = small irregular force, μ = small constant. Some assumptions on the character of f are made and the vector

$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_t^{t+\Delta t} f_i dt \right)^2$ ($i = x, y, z$) is introduced. The pure turbulent motion, isotropic and homogeneous ($Q_i = Q = \text{const}$) is discussed firstly and some relations, for example: $\overline{q_i^2} = \frac{Q}{2\mu}$, are deduced. The turbulent diffusion is discussed and the value $\overline{\sigma_i^2} = \zeta_i(t) - \zeta_i(0)$ ($\zeta_x = x; \zeta_y = y, \zeta_z = z$) is received in the form $\sigma_i^2 = \frac{Q}{\mu^2} t - \frac{Q}{\mu^2} (1 - e^{-\mu t})$; the differential equation for diffusion of property φ is constructed, namely: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (1 - e^{-\mu t}) \frac{\overline{q^2}}{\mu} \nabla \varphi$. Then the equations of turbulent flow in the case of the existence of macroscopic flow are constructed. The anisotropy of diffusion is discussed. The explanation of μ and the comparison with the observations are tried.

J. Kiebel (Leningrad).

Deicha, A.: La géométrie de Lobatchevskij dans la théorie des turbines hydrauliques. Bull. Soc. Math. France **64**, 133—135 (1936).

This paper uses elementary facts in the geometry of surfaces of constant negative curvature (in particular the fact that the ratio of the circumference of a circle on such a surface to its diameter $> \pi$) to explain the high efficiency of modern turbines (Francis) whose surfaces of flow are approximately of constant negative curvature.

Murnaghan (Baltimore).

Quantentheorie.

Podolsky, Boris: On interactions of electromagnetic fields. Philos. Mag., VII. s. **22**, 998—1002 (1936).

Japolsky, N. S.: On Dr. Podolsky's criticism. Philos. Mag., VII. s. **22**, 1003 bis 1004 (1936).

Cassen, B., and E. U. Condon: On nuclear forces. Physic. Rev., II. s. **50**, 846 bis 849 (1936).

Es wird im Anschluß an Heisenberg eine einheitliche Darstellung der Wechselwirkungskräfte zwischen den Elementarteilchen im Kern, Protonen und Neutronen, durch Einführung einer fünften Koordinate (neben den räumlichen Koordinaten und der Spinkoordinate) gegeben. Diese fünfte, nur zweier Werte fähige Koordinate besagt, ob das Teilchen ein Proton oder Neutron ist. Für den Fall gleicher Kräfte zwischen gleichen und ungleichen Teilchen nimmt das allgemeine Wechselwirkungsgesetz eine besonders einfache Gestalt an.

R. de L. Kronig (Groningen).

Weizsäcker, C. F. v.: Über die Spinabhängigkeit der Kernkräfte. Z. Physik **102**, 572—602 (1936).

Verf. untersucht die Frage nach der Abhängigkeit der Kernkräfte von der Spinorientierung, indem er ausgeht von der Fermischen Theorie des β -Zerfalls (dies. Zbl. **8**, 282). Zunächst wird der Fermische Wechselwirkungsoperator, der die Wahrscheinlichkeit für den Übergang Neutron \rightarrow Proton + Elektron + Neutrino angibt, relativistisch erweitert, und zwar untersucht Verf. 4 verschiedene Ansätze. Es ergibt sich dann in höherer Näherung eine Austauschkraft, die je nach dem zugrunde gelegten Ansatz vom Heisenbergischen, Majoranaschen oder gemischten Typ ist. Die Zahl der Möglichkeiten läßt sich weiter einschränken durch die Forderung, daß der Ansatz zu einer Änderung des magnetischen Moments des Protons von der richtigen Größenordnung führen soll. Trotzdem bleibt auch dann die Möglichkeit einer beliebigen Kombination von Heisenberg- und Majoranakraft bestehen.

Casimir (Leiden).

Wheeler, John Archibald: The dependence of nuclear forces on velocity. Physic. Rev., II. s. **50**, 643—649 (1936).

Verf. zeigt zunächst, daß die Majoranasche Austauschkraft aufgefaßt werden kann als eine gewöhnliche von den Impulsen der zwei Teilchen abhängige Wechselwirkung. Er untersucht jetzt allgemeinere von den Impulsen abhängige Wechsel-

wirkungen und zeigt, daß es eine ganze Reihe von Ansätzen gibt, die qualitativ dasselbe für den Kernbau leisten würden als der Ansatz von Majorana. *Casimir.*

Breit, G., and E. Feenberg: The possibility of the same form of specific interaction for all nuclear particles. *Physic. Rev.*, II. s. 50, 850—856 (1936).

Es wird die durch die experimentellen Daten über die Streuung von Protonen an Protonen nahegelegte Annahme gemacht, daß, von der Coulombschen Wechselwirkung abgesehen, die Kräfte Proton-Proton und Neutron-Neutron gleich den Kräften Proton-Neutron bei entsprechender Spinorientierung sind. Es wird gezeigt, daß sowohl die bekannten Eigenschaften der leichten Kerne H^3 , He^3 , He^4 als auch die Systematik der schweren Kerne dieser Annahme nicht widersprechen. *R. de L. Kronig.*

Breit, G., E. U. Condon and R. D. Present: Theory of scattering of protons by protons. *Physic. Rev.*, II. s. 50, 825—845 (1936).

Diskussion der Versuche von Tuve, Heydenburg und Hafstadt und von White über die Streuung von schnellen Protonen an Protonen mit Hilfe der von Holtsmark und Faxén zur Behandlung des Ramsauereffekts entwickelten Theorie des elastischen Stoßes. Es wird gezeigt, daß die genannten Versuche unzweideutig auf eine Abweichung der Kräfte zwischen den Protonen von der Coulombschen Wechselwirkung weisen. Zur Deutung genügt die Annahme, daß bei Entwicklung der den Streuprozess darstellenden Lösung der Wellengleichung nach Kugelwellen nur die Partialwelle nullter Ordnung in ihrer Phase gegenüber dem Fall rein Coulombscher Kräfte merkbar verändert wird. Die Änderung läßt sich quantitativ begreifen, wenn man dem Coulombschen Potential ein von der Geschwindigkeit der Protonen unabhängiges Störungspotential überlagert. Übereinstimmung mit den Experimenten kann erzielt werden, wenn man das Störungspotential etwa demjenigen gleichsetzt, das die Wechselwirkung zwischen einem Proton und einem Neutron mit entsprechender Orientierung der Spins darstellt. *R. de L. Kronig (Groningen).*

Lewis, Gilbert N.: A theory of orbital neutrons. *Physic. Rev.*, II. s. 50, 857—860 (1936).

Verf. stellt den von Breit und Wigner und von Bohr entwickelten Vorstellungen zur Erklärung der großen Wirkungsquerschnitte für die Einfangung von Neutronen durch gewisse Atomkerne eine neue Deutung gegenüber. Nach dieser soll für die Neutronen die Möglichkeit bestehen, in Bahnen um den Atomkern mit einem Radius von der Größenordnung 10^{-10} cm gebunden zu werden. Eine quantitative Ausführung dieses Gedankens, vor allem ein Nachweis, daß man so in der Tat genügend große Einfangungswahrscheinlichkeiten erhält, fehlt jedoch. *R. de L. Kronig.*

Neugebauer, Th.: Über die Herleitung der Eigenfunktion in zweiter Näherung im Falle einer gleichzeitigen zeitabhängigen und zeitunabhängigen Störung. *Mat. természett. Értes.* 54, 796—804 (1936).

Für den Fall, daß auf das Atom gleichzeitig eine einfallende Lichtwelle und ein konstantes äußeres Störungsfeld einwirkt, wird die zweite Näherung der Schrödingerschen Eigenfunktion berechnet und diskutiert. *v. Koppenfels (Hannover).*

Titicea, Ș.: Über die Absorption der Corpuscularstrahlen. *Z. Physik* 101, 378 bis 397 (1936).

Die mittlere Anregungsenergie eines Atoms, welche für sein Bremsvermögen maßgebend ist, wird, dem Vorgang Blochs folgend, auf Grund des Fermischen statistischen Modells berechnet. Für die Rechnung wird zunächst angenommen, daß die Atomelektronen klassische periodische Bewegungen ausführen, und die vom stoßenden Teilchen auf das Atomelektron übertragene Energie wird nach der klassischen Mechanik berechnet. Das Resultat ist eine Funktion der charakteristischen Parameter, welche die Bewegung des Elektrons beschreiben, wie Energie, Drehimpuls, Fourierkoeffizienten der Koordinaten usw. Im Sinne des statistischen Modells wird dann angenommen, daß das Atom 2 Elektronen pro Volum h^3 des Phasenraumes enthält. Das Resultat für die mittlere Anregungsenergie ist $9,5 Z$ Volt für ein Atom mit Kernladung Z , was

mit der empirischen Anregungsenergie (10,5 Z nach Mano, 13,5 Volt nach Bethe und Heitler) befriedigend übereinstimmt. *Bethe (Ithaka).*

Jensen, H.: Über die Existenz negativer Ionen im Rahmen des statistischen Modells. *Z. Physik* **101**, 141—163 (1936).

Eine Modifikation der Fermischen Differentialgleichung für die statistische Verteilung der Elektronen im Atom wird vorgeschlagen. Diese Modifikation ist für kleine Abstände vom Kern identisch mit der Diracschen Korrektur des statistischen Modells für Elektronenaustausch, für große Abstände ist sie äquivalent mit der Annahme von Amaldi und Fermi, daß die effektive Kernladung um eine Einheit zu erhöhen ist, weil das Elektron nicht auf sich selbst wirkt. Es wird gezeigt, daß die so modifizierte Fermigleichung vernünftige Werte für Atom- und Ionenradien, für diamagnetische Suszeptibilitäten, für Ionisierungsspannungen von Atomen und Ionen und sogar für Elektronenaffinitäten liefert, im Gegensatz zu der ursprünglichen Fermischen Gleichung.

Bethe (Ithaka).

Saha, N. K.: Studies in the electron theory of solid metal. *Trans. Nat. Inst. Sci. India* **1**, 125—185 (1936).

Nach einer historischen Übersicht über die älteren Theorien gibt der Verf. eine ausführliche Darstellung der Theorie der elektrischen Leitfähigkeit, die sich eng an die Originalarbeiten von Bloch, Bethe und Nordheim anschließt. Die Anwendung einer Methode von Heisenberg zur Quantisierung der elastischen Wellen im Kristall und Einführung der Übergangswahrscheinlichkeiten in integrierter Form an früherer Stelle bedeutet nur einen formalen Unterschied. (Es werden die Modelle des „deformierbaren“ und des „starren“ Ions verwandt, jedoch ohne Diskussion der zugrunde liegenden Hypothesen.) Es wird ferner eine Theorie der Schmelzwärme der Metalle gegeben, in der nach dem Virialtheorem für Coulombkräfte die potentielle Energie gleich der doppelten negativen kinetischen Energie gesetzt und letztere gleich der Nullpunktsenergie der Elektronen genommen wird. Aus der Volumenänderung beim Schmelzen wird damit die Energieänderung berechnet und für einwertige Metalle eine unerwartet gute Übereinstimmung mit der Erfahrung erhalten. Ferner wird eine Theorie der Druckabhängigkeit des elektrischen Widerstandes gegeben und gezeigt, daß er größenordnungsmäßig durch die Variation der Debye-Temperatur mit dem Volumen erklärt werden kann, wie nach den Theorien von Grüneisen (*Handb. d. Phys.* **10**, Kap. 1) und Mott [*Proc. Roy. Soc.* **146**, 465 (1934)], mit welchen die Theorie des Verf. vollkommen identisch ist. *Nordheim (Lafayette-Nordheim).*

Schrödinger, E.: Phenomenological theory of supra-conductivity. *Nature* **137**, 824 (1936).

Nach der Theorie von London gibt es im Inneren von Supraleitern eine besondere Art von Strom, den Suprastrom I_s , der den beiden bekannten Stromarten (Leitungs- und Verschiebungsstrom I_e und I_d) zur Seite tritt. Die Beziehungen zwischen den Feldstärken und den drei Stromarten zeigen bemerkenswerte Analogie:

$$\begin{aligned} c \operatorname{curl} (I_d/\varepsilon) &= -\dot{\vec{H}} & \dot{I}_d/\varepsilon &= \vec{E} \\ c \operatorname{curl} (I_e/\sigma) &= -\dot{\vec{H}} & \dot{I}_e/\sigma &= \vec{E} \\ c \operatorname{curl} \Lambda I_s &= -\dot{\vec{H}} & \dot{I}_s \Lambda &= \vec{E}. \end{aligned}$$

ε , σ und Λ sind Dielektrizitätskonstante, Leitfähigkeit und Konstante der Supraleitung. Die Integration der Differentialgleichungen für das Feld eines Supraleiters wird diskutiert, und es wird gezeigt, daß ΛI_s die Rolle eines Vektorpotentials im Inneren des Supraleiters spielt. *Bethe (Ithaka).*

Drăganu, Mircea: Sur l'équilibre thermique entre les électrons libres et le rayonnement. *Bul. Soc. şti. Cluj* **8**, 376—378 (1936).

Durch Anwendung einer von Brillouin stammenden Methode wird die Übergangswahrscheinlichkeit für einen Zusammenstoß zwischen einem Photon und einem Elektron berechnet, wobei durch den Comptoneffekt ein Austausch von Energie statt-

findet. Nimmt man an, daß für die Photonen das Bose-Einsteinsche und für die Elektronen das Fermi-Diracsche Gesetz der Energieverteilung gelte, dann ergibt sich unter Berücksichtigung der Energiegleichung, daß die Anzahl der Übergänge von einem Zustand i in einen Zustand i' ebenso groß ist wie die Anzahl der Übergänge von i' nach i . Das bedeutet aber, daß die schwarze Strahlung mit einem der Fermi-statistik genügenden Elektronengas im thermischen Gleichgewicht steht. Dieses Resultat stellt eine Verallgemeinerung des früher von Pauli erhaltenen Resultates dar, wonach die Plancksche Strahlung mit einem Elektronengas mit Maxwell'scher Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht ist. Fürth (Prag).

Drăganu, Mircea: Quelques remarques sur une statistique applicable aux phénomènes élémentaires. Bul. Soc. şti. Cluj 8, 379—385 (1936).

In Verallgemeinerung einer von L. Brillouin angegebenen Methode wird das Verteilungsgesetz für die häufigste Verteilung der Energie in einem aus gleichen Teilchen bestehenden Gas berechnet, wobei angenommen wird, daß die Teilchen außer der Translationsenergie E_t noch eine innere Energie ε_{rv} besitzen sollen; die Quantenzahlen r, v beziehen sich auf den Rotations- und den Schwingungsanteil dieser inneren Energie, g_t sei die Anzahl der Zellen im Phasenraum, die zur Energie E_t gehören, und γ_{rv} das statistische Gewicht eines Zustandes mit der inneren Energie ε_{rv} . Das von einem Teilchen im Phasenraum beanspruchte Volumen sei b . Für die Anzahl der Moleküle N_{trv} in einem bestimmten Energiezustand ergibt sich so $N_{trv} = \frac{\gamma_{rv} g_t}{e^{\alpha + \beta(E_t + \varepsilon_{rv})} + b}$.

Es wird nun angenommen, daß die Teilchen miteinander in Wechselwirkung treten können, wobei sie nicht nur Translations-, sondern auch innere Energie austauschen. Es läßt sich dann eine Formel für die durch solche Reaktionen bewirkte Übergangswahrscheinlichkeit aus einem Zustand t, r, v in einen anderen Zustand t', r', v' angeben. Die Bedingung für das Herrschen von statistischem Gleichgewicht in dem Gas besteht in der Forderung, daß die Anzahl der ebenerwähnten Umwandlungen nach beiden Richtungen hin gleich groß sein muß. Es ergibt sich, daß die einzige notwendige Bedingung hierfür das Bestehen des oben angegebenen Verteilungsgesetzes bildet.

Fürth (Prag).

Ornstein, L. S.: On the scattering of neutrons in matter. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 810—812 (1936).

Ausgehend von der Annahme, daß die Richtungsverteilung beim Zusammenstoß zwischen Proton und Neutron im Schwerpunktssystem kugelsymmetrisch ist, berechnet Verf. die statistische Verteilung der Energie eines Neutrons, nachdem es n -mal mit einem Proton zusammengestoßen ist, sowie die Verteilung bei vorgegebener mittlerer Zahl von Stößen. Casimir (Leiden).

Kishen, Jai: Dissociative equilibrium and pair generation. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 10, 389—397 (1936).

Nähere Diskussion der statistischen Formeln für thermische Ionisierung usw. sowie auch für Erzeugung und Auflösung von Elektronenpaaren im Gleichgewicht mit Strahlung. P. Jordan (Rostock).

Klassische Theorie der Elektrizität.

Neufeld, Jacob: On the anomalous properties of dielectrics. J. Franklin Inst. 222, 327—336 (1936).

Unterwirft man ein Dielektrikum abwechselnden mechanischen Spannungen, so wird eine beträchtliche Wärmemenge frei. Die theoretischen Gründe dafür sind nicht völlig klar; man schreibt die Wärmeerzeugung teils dielektrischer Absorption, teils dielektrischer Hysteresis zu. Die vorliegende Arbeit gibt eine Methode an, die Hysteresisverluste von den Absorptionsverlusten zu trennen, und die Absorptionskurve analytisch zu bestimmen in dem besonderen Fall, daß keine Hysteresis vorhanden ist. Bechert.

Krasny-Ergen, Wilhelm: Zwei leitende, isolierte Kugeln im homogenen elektrischen Feld. *Ann. Physik*, V. F. 27, 459—471 (1936).

Es handelt sich darum, eine mathematische Erklärung dafür zu finden, daß dielektrische Kugeln (z. B. Fetttröpfchen) in einer homogenen umgebenden Flüssigkeit beim Anlegen eines hochfrequenten elektrischen Feldes sich wie Perlschnüre parallel zur elektrischen Feldrichtung einstellen. Eine elementare Überlegung, welche keine Rücksicht nimmt auf die gegenseitige Beeinflussung der Kugeln, sondern lediglich die in den Kugeln induzierten Dipole berücksichtigt, ergibt den richtigen Effekt. Dieser Zustand wird als erste Näherung bei der Berechnung angenommen. Die Lösung beruht bei der Annahme der Kugeloberflächen als Äquipotentialflächen auf sukzessiver Spiegelung an dieser Oberfläche. Hierdurch erhält man Formeln, welche in erster Näherung die entstehenden Dipolmomente der Kugeln infolge der Wirkung des äußeren Feldes ergeben. In Wirklichkeit muß man mit der Bedingung rechnen, daß die Kugeln ungeladen sind. Hieraus ergeben sich dann in analoger Weise wie bei der ersten Näherung die folgenden Näherungen und schließlich die Dipol- und Multipolmomente der Kugeln. Die Schlußformeln werden numerisch diskutiert. *M. J. O. Strutt.*

Jassinsky, W. W.: Beschleunigung der Elektronen im elektromagnetischen Wechselstromfeld. *Arch. Elektrotechn.* 30, 590—603 (1936).

Theoretische Diskussion der Elektronenbewegung im elektromagnetischen Wechselstromfeld; insbesondere wird das Auftreten von Kreisbahnen untersucht. *Bechert.*

Pidduck, F. B.: Electrical notes. VI a. VII. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 199 bis 209 (1936).

The author has calculated previously the kinetic energy acquired by electrons in a gas of molecules in a uniform electric field under the assumption that the ratio of the mean energy of electrons to the mean energy of molecules does not differ far from unity. It is shown that this previous formula can be extended to ratios differing widely from unity. A table shows the calculated velocity distribution of electrons according to the present formula for ratios between 1 and large values. Then, as a note VII, the author considers space charges in a magnetic field and first the motion of an outward stream of electrons between a filament and a coaxial cylindrical sheath. The magnetic field of the electrons is neglected and besides a radial electric field, a uniform magnetic field parallel to the filament is assumed. Steady and oscillatory motion is considered, starting from the classical equations, the period of the oscillations being such, that no transit time effects occur. After a simple steady stream, directed from the filament to the anode, a double stream, arising from the radius of the anode being greater than the radius of the turning points due to the magnetic field, is considered. Then, small oscillations, superimposed on a steady stream, are dealt with. Finally, the conditions at a turning point are discussed. (V. see this Zbl. 4, 137.)

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Pidduck, F. B.: Electrical notes. VIII. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 210—213 (1936).

From the previous note VII the author concludes, that with oscillations in a single anode magnetron of usual shape and voltages, the currents are very much below the saturation currents which were calculated. This justifies the neglect of space charge in the calculations of the present note, pertaining to such a magnetron. Starting from a discussion of the disturbed motion of the electrons in a magnetron, the current is calculated, including transit time. Then the single anode magnetron is discussed, connected to a condenser circuit.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Graffi, Dario: Una teoria ereditaria dell'effetto Lussemburgo. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* 7, 36—54 (1936).

Mit Luxemburgeffekt ist die Beobachtung gemeint, daß das Feld einer sehr starken Radiostation dasjenige einer schwächeren so beeinflussen kann, daß dabei auch ein Feld mit der Modulation der ersten und der Frequenz der zweiten Station entsteht.

Verf. versucht diese Erscheinung phänomenologisch zu erklären durch die Annahme eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen dem Ladungstransport (Stromstärke) in der Ionosphäre und dem elektrischen Feld. Qualitativ ergeben sich die beobachteten Eigenschaften des Effekts. Zum Schluß Erweiterung der Resultate der vorigen Arbeit (*Sopra alcuni fenomeni ereditari della elettrologia*, Nota V; vgl. nachst. Ref.) auf den hier betrachteten Fall nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Stromstärke und elektrischem Feld. *Bechert (Gießen).*

Graffi, Dario: Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia. II. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 68, 559—582 (1935).

Es wird gezeigt, daß das Grundproblem der Elektrostatik für ein System von Leitern in einem homogenen, isotropen Dielektrikum, das „Nachwirkung“ (Hysteresis) zeigt, sich auf das entsprechende Problem ohne Nachwirkung zurückführen läßt. Die Beziehung zwischen Potentialdifferenz und Ladung auf den Belegungen eines Kondensators in einem Dielektrikum mit Nachwirkung wird aufgestellt. Untersuchung des Einflusses der Nachwirkung auf Ladung und Entladung eines Kondensators. (I. vgl. dies. Zbl. 12, 380.) *Bechert (Gießen).*

Graffi, Dario: Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia. III. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 124—139 (1936).

Die Überlegungen der vorangehenden Arbeit (s. das vorhergehende Referat!) werden auf den Fall heterogener Medien ausgedehnt und die Feldgleichungen für spezielle Fälle gelöst. Erweiterung auf den Fall von Wechselfeldern; auch dieser Fall kann auf Probleme ohne Nachwirkung zurückgeführt werden durch Benutzung komplexer Zahlen. Berechnung der durch Nachwirkung verlorenen (d. h. in Wärme umgewandelten) Energie. *Bechert (Gießen).*

Graffi, Dario: Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia. IV. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 140—150 (1936).

Berechnung des Drehmomentes, das infolge von Nachwirkung und elektrischer Leitfähigkeit auf eine Kugel ausgeübt wird, die sich in einem rotierenden elektrischen Feld befindet. Es wird bewiesen, daß die meisten Ergebnisse dieser und der vorhergehenden Arbeit (s. das vorhergehende Referat!) noch richtig bleiben, wenn man zwischen elektrischer Verschiebung und elektrischer Feldstärke eine Beziehung allgemeinerer Art annimmt, als der lineare Nachwirkungsansatz voraussetzt. *Bechert.*

Graffi, Dario: Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia. V. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 151—166 (1936).

Verf. gibt Gründe dafür an, daß man zur möglichst vollständigen Behandlung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in ionisierten Gasen in die Maxwellschen Gleichungen Nachwirkungsglieder einsetzen sollte. Er zeigt, daß auch die so verallgemeinerten Gleichungen zur Folge haben, daß das von einer Antenne erzeugte elektromagnetische Feld durch den Strom in der Antenne bestimmt ist, wie es sein muß. Untersuchung der Fortpflanzung von Diskontinuitäten in einem ionisierten Gas. *Bechert (Gießen).*

Hak, J.: Zur Praxis der symbolischen Methode zur Lösung von Ausgleichsvorgängen. Arch. Elektrotechn. 30, 671—677 (1936).

Verf. erläutert kurz die Grundlagen der symbolischen Rechenweise, welche im wesentlichen darauf beruht, Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Laplaceschen Transformierten zu finden. Für einige einfache Funktionen werden die Laplaceschen Transformierten angegeben. Sodann stellt Verf. eine Anzahl von neu berechneten Sonderfällen zusammen, wobei der Integrand des Laplaceschen Integrals gleich dem Quotienten zweier ganzer rationaler Funktionen ist. Mit Hilfe dieser neu berechneten Formeln gelingt es z. B. einfach, den Fall zweier gekoppelter Schwingungskreise zu lösen. Endlich zeigt Verf. am Beispiel zweier solcher Kreise, wie stark die Berechnung durch Anwendung der symbolischen Methode gekürzt wird. *Strutt.*

Aigner, F., und C. L. Kober: Die Theorie der Modulation und Demodulation. I u. II. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 48, 59—67 u. 99—107 (1936).

Verff. gehen aus von der „Modulationsgleichung“ $L(u) + S(u) = 0$, wobei L einen Differentialoperator zweiter Ordnung darstellt, der linear mit i. a. nichtkonstanten Koeffizienten angenommen wird. Die „Steuerfunktion“ S ist dabei eine i. a. nichtlineare Funktion von u und von der zeitlichen Ableitung von u . Als Sonderfälle entstehen die Differentialgleichungen von Hill und von Mathieu sowie die Differentialgleichung der Kippschwingungen. Im linearen Falle kann die Differentialgleichung mit Hilfe einer geeigneten Belegungsfunktion leicht in eine Integralgleichung umgeschrieben werden. Wenn eine harmonische äußere Kraft mit der Frequenz β vorliegt, kann hieraus der Schluß gezogen werden, daß die Lösung die Frequenzen $\beta \pm m\omega \pm n\alpha$ enthält, wobei α die Grundfrequenz ist, welche in der Störungsfunktion vorkommt, und ω die Grundfrequenz des schwingenden Systems. Verff. schließen, daß theoretisch die Seitenbandbreite bei irgendeinem Modulationsverfahren nach einer solchen Gleichung stets unendlich groß sein muß, wenn auch praktisch oft nur die Glieder erster Ordnung ins Gewicht fallen. Im nichtlinearen Falle wird ein analoger Schluß gezogen, wobei insbesondere auf das Vorkommen niederfrequenter Kombinationsfrequenzen hingewiesen wird. In beiden Fällen werden die ersten Glieder einer Reihenentwicklung der Lösung hingeschrieben. Die verschiedenen technischen Modulationsverfahren werden in das Schema dieser Gleichungen eingereiht. Mit Hilfe der Operatorenrechnung werden die Ausgleichsvorgänge untersucht, wobei sich ein Unterschied zwischen der Frequenzmodulation und der Phasenmodulation herausstellt. Bei der Behandlung der Demodulation im zweiten Teil der Arbeit gehen Verff. von denselben Gleichungen aus. Die Zusammenhänge zwischen diesen Gleichungen und den verschiedenen technischen Demodulationsverfahren werden klargelegt. Der letzte Abschnitt der Arbeit behandelt die Frage des Entstehens von Schwebungen. Zunächst werden die Schwebungen in linearen Systemen mit Hilfe des Superpositionsprinzips behandelt (Schwebungen erster Ordnung). Die Rolle der Schwebungen bei der Modulation wird erläutert. Zum Schluß kommen die Schwebungen höherer Ordnung durch Zusammenwirken von mehreren Schwingungen. Bei nicht vollkommen periodischen Schwingungen entstehen „unscharfe“ Schwebungsvorgänge. An zwei paradoxal scheinenden Fällen wird gezeigt, wie eine Nichtbeachtung der von den Verff. behandelten Verhältnisse leicht unrichtige Schlüsse gezogen werden können. Ein ausführliches Literaturverzeichnis beschließt die Arbeit. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Kober, C. L.: Die Berechnung von nichtlinearen Verzerrungen. Elektr. Nachr.-Techn. 13, 336—340 (1936).

Verf. will die nichtlinearen Verzerrungen von Übertragungssystemen bei vorgegebener Charakteristik berechnen. Hierzu muß von einer analytischen Formulierung dieser Charakteristik ausgegangen werden. Zunächst geht Verf. auf einige bisher vorgeschlagene Formulierungen ein, insbesondere auch von mehrdeutigen Charakteristiken. Genannt werden die arctg -Funktion und trigonometrische Funktionen. Als besonders zweckmäßig erkennt Verf. eine Summe von Exponentialfunktionen, wie sie vom Ref. bereits mehrfach benutzt wurde. Durch die bekannte Entwicklungsförmel einer Exponentialfunktion in eine Reihe nach Produkten von Besselschen und trigonometrischen Funktionen liegt gewissermaßen die Fourierreentwicklung für die Verzerrungen, welche bei einer solchen Charakteristik auftreten, von vornherein bereit. Verf. führt dies besonders aus für einen Gleichrichter. *M. J. O. Strutt (Eindhoven).*

Becker, Maximilian: Über den Einfluß des Erdbodens auf die Ausbreitung horizontal und vertikal polarisierter ultrakurzer elektrischer Wellen. Jena: Diss. 1936. 35 S.

An experimental investigation of the electric field intensity of ultra-short waves as a function of height above the ground and of the polarization of the emitted wave, for various emitter and receiver conditions. The results are found to agree with formulae for the product of field strength and distance from the emitting dipole, analogous

to that found by Smith-Rose and McPetrie [Proc. Phys. Soc., London **43**, 592 to 612 (1931)] for a vertical coil emitter. *M. Slow-Taylor* (Bucks/Engl.).

Steffenhagen, Kurt: Über die Realisierung von Wechselstromwiderständen nach der Methode von Dr.-Ing. W. Cauer mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. *Elektr. Nachr.-Techn.* **13**, 357—361 (1936).

Unter Hinweis auf die Arbeiten von Cauer und Glowatzki will Verf. Lücken in den bisherigen Veröffentlichungen, besonders die praktische Anwendung des Verfahrens betreffend, ausfüllen. Es kommt darauf an, Zweipolwiderstände durch Quotienten darzustellen. Verf. führt dies an vier Beispielen durch. *M. J. O. Strutt.*

Klassische Optik.

Herzberger, M.: First-order laws in asymmetrical optical systems. I. The image of a given congruence: Fundamental conceptions. *J. Opt. Soc. Amer.* **26**, 354—359 (1936).

Ist bei der strahlengeometrischen Abbildung durch ein optisches System das objektseitige Strahlenbündel bzw. jeder Strahl dieses Bündels durch die mit dem Brechungsindex multiplizierten Richtungskosinus sowie durch die Koordinaten des Durchstoßungspunktes des betr. Strahls mit einer achsensenkreten Ebene, die als xy -Ebene gewählt sei, gegeben, so lassen sich die Gleichungen, die die entsprechenden Größen des bildseitigen zugeordneten Strahls als Funktionen der den objektseitigen Strahl kennzeichnenden Größen angeben, als Matrizengleichungen schreiben. Der Verf. gibt zunächst noch einmal die Rechenregeln der Matrizenrechnung. Er zeigt dann, daß zwischen den die Abbildung charakterisierenden vier Matrizen sechs Beziehungen bestehen, die für die Auflösung der Abbildungsgleichungen (in Matrizenform) nach den Objektstrahlkoordinaten nützlich sind. Ist ein Strahlenbündel, eine „Strahlenkongruenz“ gegeben, so sind die vier obengenannten Strahlkoordinaten nicht voneinander unabhängig, sondern durch zwei Gleichungen, die sich gleichfalls in Matrizenform schreiben lassen, verbunden: Jeder Strahlrichtung entspricht ein Durchstoßungspunkt (2 Gleichungen!) und umgekehrt. Handelt es sich um eine Normalkongruenz, so sind die die Kongruenz charakterisierenden Matrizen symmetrisch. Es werden die Matrizen der zugeordneten bildseitigen Kongruenz abgeleitet und diskutiert. Weiter behandelt der Verf. die Winkelvergrößerung und die dieser durch das Dualitätsprinzip zugeordneten drei Größen. *Picht* (Berlin-Steglitz).

Marton, L.: Quelques considérations concernant le pouvoir séparateur en microscopie électronique. *Physica* **3**, 959—967 (1936).

Für die Untersuchung biologischer Stoffe im Elektronenmikroskop, die im allgemeinen bei Durchstrahlung des Gegenstandes mit schnellen Elektronen erfolgt, ist es von Bedeutung, zu wissen, wie sehr sich eine Einlagerung von bestimmter Dicke, Dichte, Atomzahl und bestimmtem Atomgewicht von dem umgebenden Stoff mit anderen Konstanten unterscheiden muß, damit sich ein wahrnehmbarer Unterschied in der Streuung der Elektronen in beiden Schichten ergibt. Die Rechnungen, denen die von Bothe abgeleiteten Formeln über Vielfachstreuung zugrunde gelegt werden, werden für den Fall einer Auflagerung auf einem Träger und den Fall einer gefärbten Einlagerung durchgeführt. Im Gegensatz zum gewöhnlich betrachteten Auflösungsvermögen nimmt dieses „Tiefenauflösungsvermögen“ mit zunehmender Geschwindigkeit der Elektronen ab. *Henneberg* (Berlin).

Funk, Paul, und Walter Glaser: Berechnung elektronenoptischer Konstanten als Eigenwertproblem. *Z. Physik* **102**, 603—610 (1936).

Da sich die Gleichung für die Bahn achsennaher Elektronenstrahlen in Elektronenlinsen stets auf die Form $y'' + g(x)y = 0$ bringen läßt, kann man den zwischen Bild- und Gegenstandspunkt (x_1 und x_0) bestehenden Zusammenhang auf ein Eigenwertproblem zurückführen, indem man als Eigenwertparameter bei $g(x)$ einen Faktor λ

hinzufügt, der z. B. für die rein magnetische Linse die Bedeutung des Quadrates des erforderlichen Spulenstromes haben kann. Die Aufgabe $\lambda = \text{Extremum}$ wird von den Verff. nach dem Ritzschen Näherungsverfahren gelöst; dabei ergeben sich in 1. Näherung wieder die von H. Busch abgeleiteten Brennweitenformeln. *Henneberg.*

Gratsiatos, J.: Zur Bildfehlertheorie der elektronenoptischen Systeme. *Z. Physik* **102**, 641—651 (1936).

Die Theorie der Elektronenoptik läßt sich bekanntlich sowohl in Analogie zur geometrischen Lichtoptik als auch vom Standpunkt der Bewegung eines elektrisch geladenen Teilchens im elektrischen und magnetischen Felde behandeln. Das gilt natürlich auch für die Behandlung der Abbildungsfehler elektronenoptischer Systeme. In Analogie zur Lichtoptik ist dies besonders durch W. Glaser in einer Reihe von Arbeiten geschehen, und zwar unter Benutzung des Seidelschen Eikonals. Der Verf. leitet die Ausdrücke für die Abbildungsfehler erneut ab, ausgehend vom Punkteikonale, und zeigt, daß die Ergebnisse mit den von Glaser erhaltenen Formeln sowie mit den Formeln in Übereinstimmung stehen, die sich aus der Bahnbewegung des Elektrons im elektrisch-magnetischen Felde ergeben. *Picht* (Berlin-Steglitz).

Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

Brunner, Roland: Zur Ableitung des Nernstschen Theorems. *Z. Physik* **100**, 584 bis 593 (1936).

Speculations of a general nature on Nernst's theorem, negative absolute temperatures and the entropy of the world. *O. Halpern* (New York).

Odone, F.: Sulla temperatura assoluta T , e sulle principali relazioni termodinamiche. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **23**, 865—870 (1936).

The author derives expressions for the standard thermodynamic functions in terms of a single "internal thermodynamic potential" and its derivatives, for different forms of the expression for the external work done in any infinitesimal change in the given system. *W. H. McCrea* (Belfast).

Fürth, Reinhold: Die Wärmeleitungsgesetze in bewegten Medien. Bemerkungen zu der gleichnamigen Arbeit von Maximilian Lang. *Ann. Physik*, V. F. **27**, 256—260 (1936).

Lang, M.: Die Wärmeleitungsgesetze in bewegten Medien. Entgegnung zu den Ausführungen des Herrn R. Fürth. *Ann. Physik*, V. F. **27**, 472—475 (1936).

Fürth, Reinhold: Die Wärmeleitungsgesetze in bewegten Medien. Erwiderung auf die „Entgegnung“ von Herrn M. Lang. *Ann. Physik*, V. F. **27**, 476 (1936).

Vgl. dies. Zbl. **13**, 139.

Dehlinger, U.: Eine thermodynamische Erweiterung der Diffusionsgleichung. *Z. Physik* **102**, 633—640 (1936).

In einer früheren Arbeit [*Z. Physik* **79**, 550 (1932)] hat der Verf. für irgendwelche Umlagerungen der Atome in einem System die Differentialgleichung $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -A \frac{\partial F}{\partial \lambda}$ abgeleitet, in der $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ die Änderungsgeschwindigkeit einer den jeweiligen Zustand des Systems kennzeichnenden Größe λ , $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ die dabei eintretende Änderung der freien Energie und A eine positive, temperaturabhängige Größe bedeutet. Wendet man diese Gleichung auf die Diffusion in einer idealen Mischung mit der Konzentration α an, dann erhält man die Gleichung $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -A \frac{RT}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$, die in die Ficksche Diffusionsgleichung übergeht, wenn man setzt: $A = \frac{\alpha D}{RT}$. Man erhält daher eine auch für die Diffusion in nichtidealen Mischungen gültige Diffusionsgleichung, wenn man diesen Wert von A in die Dehlingersche Gleichung einsetzt: $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{\alpha D}{RT} \frac{\partial F}{\partial \lambda}$. In dieser

Form kann sie, wie weiter ausgeführt wird, u. a. benutzt werden, um aus den gemessenen „effektiven“ Diffusionskoeffizienten die wahren, also z. B. in festen Körpern die wahren Platzwechselzahlen der Atome im Kristallgitter zu berechnen. *Fürth.*

Takéuchi, Tokio: *Théorie du „chronostat“ et la loi de Wien.* Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 131—132 (1936).

The author claims to derive Wien's law from considerations which apply his theory of the "chronostat" [C. R. 189, 1068 (1929)] to "white radiation". *O. Halpern.*

Brillouin, Léon: *La chaleur spécifique des liquides et leur constitution.* J. Physique Radium, VII. s. 7, 153—156 (1936).

Nach Debye kann man die Wärmebewegung in einem festen Körper als die Überlagerung stehender longitudinaler und transversaler Wellen auffassen. Ist der Körper isotrop, dann gehören zu jeder Wellenlänge dieser Wellen zwei longitudinale und eine transversale Welle, deren Schwingungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen. Sieht man eine Flüssigkeit als den Grenzfall eines festen Körpers mit verschwindend kleinem Elastizitätsmodul an, dann müssen im Augenblicke des Schmelzens die beiden Transversalwellen in ein System von persistenten Wirbeln übergehen, denen zum Unterschied von den Wellen nur kinetische, aber keine potentielle Energie zukommt. Die Longitudinalwellen werden jedoch beim Schmelzen nicht zerstört. Für den Grenzfall hoher Temperaturen erhält man also nach dem Gleichverteilungssatz für eine einatomige Substanz aus N Atomen für die kinetische Energie den Wert $3N \cdot 1/2 kT$ und für die potentielle Energie den Wert $N \cdot 1/2 kT$, für die spezifische Wärme bei konstantem Volumen daher den Wert $2R$, der zwischen dem Wert $3R$ für den festen Körper und dem Wert $3/2 R$ für das Gas liegt. Für tiefere Temperaturen hat man die Longitudinalwellen als Oszillatoren und die Wirbel als Rotatoren zu quanteln und erhält daher für die spezifische Wärme einen dem Debyeschen ähnlichen Ausdruck, der eine Verminderung der spezifischen Wärme mit fallender Temperatur voraussagt. In Wirklichkeit zeigen jedoch die Flüssigkeiten in der Nähe des Schmelzpunktes eine spezifische Wärme nahe an $3R$, die bis zu $2R$ beim kritischen Punkte abnimmt. Daraus ist zu schließen, daß die Flüssigkeiten eine Art von kristalliner Mikrostruktur besitzen, die erst beim kritischen Punkt völlig verschwindet. *Fürth.*

Lucas, René: *Sur les chaleurs spécifiques des liquides et des gaz.* C. R. Acad. Sci., Paris 203, 773—774 (1936).

Im Anschluß an die oben referierte Arbeit von Brillouin wird darauf hingewiesen, daß in einer zähen Flüssigkeit gemäß der klassischen Hydrodynamik Transversalwellen existieren können mit der Phasengeschwindigkeit $V_t = 2\sqrt{\pi\eta\nu/\rho}$ und der Gruppengeschwindigkeit $U_t = 4\sqrt{\pi\eta\nu/\rho}$. Diesen Wellen kommt aber im Gegensatz zu den Longitudinalwellen keine potentielle Energie zu. Man kann daher die Debyesche Theorie der spezifischen Wärmen von den Festkörpern auf die Flüssigkeiten mit innerer Reibung formal ohne weiteres übertragen. Für hohe Temperaturen folgt dann wie bei Brillouin für die Atomwärme einer einatomigen Substanz der Wert $2R$. In einem Gas verschwindet auch die potentielle Energie der Longitudinalwellen, und es ergibt sich daher für die spezifische Wärme wieder ein Debyescher Ausdruck, der für hohe Temperaturen in $3/2 kT$ übergeht, wie es die kinetische Gastheorie verlangt.

Fürth (Prag).

Sokolow, P., und S. Sosinski: *Zur Frage über die Bewegung der Flüssigkeiten im elektrischen Felde.* Acta physicochim. (Moskva) 5, 433—450 (1936).

In seiner Arbeit über die Beweglichkeit der Elektrolytionen hat Born berücksichtigt, daß die Dipole des Wassers durch das elektrische Feld der Ionen eine Richtwirkung erfahren und daß daher auf die Wasserdipole durch das Ion Energie übertragen wird. Dies bewirkt das Auftreten eines Gliedes $\frac{\eta}{2} \text{rot} \mathfrak{G}$ neben dem Stokesschen Glied $-\mu \Delta v$ in der hydrodynamischen Bewegungsgleichung für zähe Flüssigkeiten. Darin bedeutet η den mikroskopischen Reibungskoeffizienten des Dipols und \mathfrak{G} einen

Vektor, der durch die Gleichung $\mathcal{G} = \mathcal{D}(\mathfrak{F}\mathfrak{F}) - \mathfrak{F}(\mathcal{D} \cdot \mathfrak{F})$ definiert ist, worin gesetzt ist: $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v}$ und $\mathfrak{F} = \frac{m}{kt} \mathbf{C}'$; m ist die Masse des Dipols und E' das auf den Dipol wirkende elektrische Feld. Die um dieses Glied erweiterte Gleichung kann nun allgemein für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit in einem beliebigen elektrischen Felde angewendet werden. Es wird zunächst der Fall einer Laminarströmung durch den Zwischenraum zwischen zwei konzentrischen Rohren berechnet, zwischen denen eine Potentialdifferenz besteht und dann der Fall der Laminarströmung durch eine Kapillare mit rechteckigem Querschnitt, in der parallel zu einer der Rechteckseiten ein homogenes Feld herrscht. Es ergibt sich in beiden Fällen eine zum Quadrat der Potentialdifferenz proportionale relative Vergrößerung der Durchflußzeiten. Einsetzen numerischer Werte zeigt, daß dieser Effekt sich experimentell nachweisen lassen dürfte.

Fürth (Prag).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Sezawa, Katsutada, and Kiyoshi Kanai: Dissipation waves accompanying forced seiches in a bay. Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 14, 360—365 (1936).

Im Anschluß an frühere Untersuchungen über Seiches in einer epikontinentalen See (vgl. dies. Zbl. 12, 382) und in Meeresstraßen (vgl. dies. Zbl. 14, 96) werden die Dissipationswellen im Gefolge der erzwungenen Seiches einer Bai untersucht. Diese wird rechtwinklig und von gleichförmiger Tiefe angenommen und soll viel länger als breit sein. Ist $2R$ ihre Breite und verläuft die x -Achse durch ihre Mittellinie, so sind die Grenzbedingungen, daß die Vertikalbewegung gleich ist für $x = 0$ und $r = R$ (r Radiusvektor vom Nullpunkt in die offene See) für gleiche y , und daß der Wassertransport durch $r = R$ und durch die Mündung derselbe ist. Je höher die Frequenz der einfallenden Welle, desto mehr ist die nach außen dissipierte Welle polarisiert in Richtung der Längserstreckung der Bai. Die Gesamtenergie dissipierter Wellen ist kleiner für lange einfallende Wellen, aber die Amplitude der Seiches ist größer.

Haurwitz (Toronto).

Gassmann, Fr.: Störung des Erdfeldes durch induktiv magnetisierte Einlagerungen. Beitr. angew. Geophys. 6, 204—205 (1936).

Maneff, G. Iv.: La radiation cosmique comme base d'une théorie unitaire de l'électricité et de la gravitation. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 32, 161—222 u. franz. Zusammenfassung 223—225 (1936) [Bulgarisch].

Terada, Kazuhiko: The general flow of the ion-current in the earth's atmosphere. Geophys. Mag. 10, 275—308 (1936).

Der elektrische Ionenstrom in der Atmosphäre, sowohl in der Vertikalen wie in der Horizontalen, wird unter der Voraussetzung untersucht, daß er durch den Potentialgradienten und den Transport der Raumladung verursacht ist. Dann gelten nämlich für das elektrische Feld der Atmosphäre die beiden Gleichungen $i = -\lambda \text{grad} V + \varrho \mathfrak{B}$; $\Delta V = -4\pi\varrho$. Kennt man also ϱ , so läßt sich mittels der beobachteten Werte von λ und \mathfrak{B} der Ionenstrom leicht berechnen. Für die Verteilung der Raumladung bezüglich Breite und Höhe wird ein mathematischer Ausdruck gefunden, der die beobachteten Werte gut wiedergibt. Der theoretische Stromverlauf wird graphisch aufgezeichnet, aber der Vergleich des Leitungsstromes mit dem Konvektionsstrom stößt auf Schwierigkeiten, da der numerische Wert des Viskositätskoeffizienten unbekannt ist.

J. N. Hummel (Berlin).

Bjerknes, J., and C. L. Godske: On the theory of cyclone-formation at extra-tropical fronts. Astrophys. Norvegica 1, 199—235 (1936).

Im ersten Kapitel der Abhandlung, von J. Bjerknes verfaßt, werden die verschiedenen Möglichkeiten von Druck und Geschwindigkeitsfeldern einer Frontalzone dargelegt und die Entwicklung einer jungen Zyklone durch Wellenbildung an der

Front beschrieben. Das zweite, von C. L. Godske verfaßte Kapitel beschreibt eine Reihe einfacher Wellenformen. Verf. geht dabei von einem System aus, dessen statische und dynamische Stabilität der der Atmosphäre gleichkommt — auf die Erfüllung der kinematischen Bedingungen mußte der Schwierigkeit wegen verzichtet werden. Es wird gezeigt, daß reine Gravitations- und reine Trägheitswellen in dem zugrunde gelegten System stets reelle Frequenzen aufweisen, also stabil sind. Auch die durch Trägheit und Schwere gemeinsam erzeugten Wellentypen sind stabil. Es läßt sich weiter zeigen, daß die Atmosphäre, die ja infolge ihrer Eigenrotation gegen die Erde in ihrer Bewegungsform von der des zirkularen Wirbels abweicht, in ihrer Windverteilung in unseren Breiten nicht die labilisierende Wirkung zur Erzeugung instabiler Zyklonenwellen aufzubringen vermag. Als solche sieht Verf. die Scherkräfte im Bereich der Frontalzone an, deren Existenz er damit als notwendige Bedingung für die Zyklonenbildung hinstellt. Es zeigt sich dann, daß unter dieser Annahme eine neue Gruppe von Wellen mit folgendem Aufbau auftritt: 1. lange stabile Wellen, 2. lange instabile Wellen (Zyklonenwellen), 3. kurze stabile Wellen und 4. kurze instabile Wellen. Der kritische Wert der langen instabilen Wellen ist etwa von der Größenordnung des Zyklonenabstands. Eine Abschätzung des vernachlässigten Einflusses der kinematischen Bedingungen ergibt eine noch bessere Übereinstimmung. Im dritten Kapitel, ebenfalls von C. L. Godske verfaßt, wird die Solbergsche Theorie der Zyklonenwellen in dem zugrunde gelegten System angewendet und diskutiert. Eine Reihe von Abschätzungen führt dann auf instabile Wellen derselben Größenordnung wie die im zweiten Kapitel gefundenen. Die berechnete und in Tabellen angegebene Wellenlänge als Funktion der Geschwindigkeitsdifferenz und des Temperatursprungs an der Front im stabilen Falle und als Funktion der Geschwindigkeitsdifferenz allein im instabilen Falle führt zu Werten, die mit den beobachteten gut übereinstimmen. Zum Schluß wird der vernachlässigte kinematische Einfluß auf die Zyklonenwellen kurz behandelt.

H. Philipps (Bad Homburg v. d. H.).

Scherhag, R.: Bemerkungen zur Divergenztheorie der Zyklonen. Meteorol. Z. 53, 84—90 (1936).

Verf. macht die schon früher oft behandelte Frage nach der Herkunft der Zyklonenenergie zum Ausgangspunkt seiner Betrachtungen. Er kommt dabei zu dem Schluß, daß die in der Zykzone vorhandene kinetische Energie von der kinetischen Energie der Höhenwestdrift herrührt, wobei das Druckfeld die Rolle des Übersetzungsmechanismus übernimmt. Es wird sodann die Definition des divergenten Druckfeldes gegeben. Nach kurzen Betrachtungen über die Bernoullische Gleichung werden zwei Möglichkeiten des Druckfalls im atmosphärischen Divergenzgebiet diskutiert. Zum Schluß wird die kinetische Energie der Höhenströmung im aktiven Teil der Frontalzone und die einer kreisförmigen bereits verwirbelten (okkludierten) Zykzone berechnet. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke läßt sich die Länge L der Frontalzone ermitteln. Sie ist der Frontneigung und dem Quadrate des Temperatursprungs umgekehrt proportional. Ein Beispiel zeigt, daß sich für L ein plausibler Wert ergibt, d. h. daß die kinetische Zyklonenenergie der Größenordnung nach mit der der Strömung im aktiven Teil der Frontalzone übereinstimmt. [In Formel (17) muß es heißen 0,35 statt 3,5!]

H. Philipps (Bad Homburg v. d. H.).

Maurer, H.: Über Winkeltreue in Kartenentwürfen. Ann. Hydrogr. 64, 421 bis 433 (1936).

Eine Besprechung der Abhandlung von A. Wedemeyer, Winkeltreue Kartenetze in elementarer Behandlung, Arch. Deutsch. Seewarte 55, Nr. 2 (1936); gibt Anlaß zu einer Kritik der dort benutzten Terminologie sowie des elementaren Beweises der Eigenschaften verschiedener winkeltreuer Projektionen. A. Michailov (Moskau).

Werkmeister, P.: Unterbrochene Streckenmessung. Allg. Vermessgs-Nachr. 48, 594—598 (1936).